



Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

Material de Apoio e Lista de Exercícios

Círculo e Circunferência

Professor: Danilo Kanno

Guaratinguetá

1 Definições Fundamentais

Frequentemente, os termos círculo e circunferência são empregados como sinônimos na linguagem cotidiana. No entanto, no rigor da geometria plana, eles representam conceitos distintos.

Circunferência é definida como o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão a uma mesma distância, denominada raio, de um ponto fixo, denominado centro. Trata-se, portanto, exclusivamente da linha curva fechada.

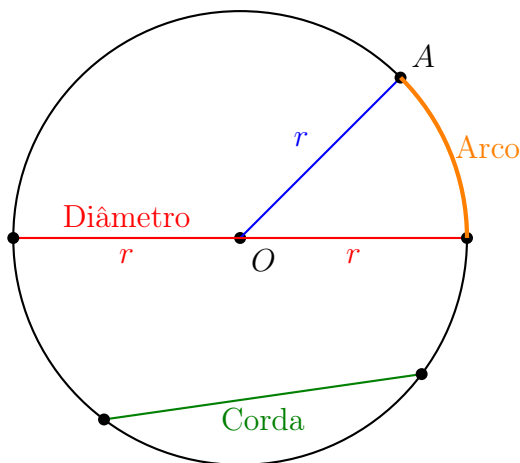
Círculo é a união da circunferência com a região plana interior delimitada por ela. Em outras palavras, compreende a superfície somada à sua fronteira.

Para efeito de ilustração espacial, é possível associar a circunferência à forma de um anel, enquanto o círculo assemelha-se à forma de uma moeda.

2 Elementos da Circunferência

Considere uma circunferência de centro O e raio r . Nela, destacam-se os seguintes elementos geométricos notáveis:

- **Raio (r):** Segmento de reta que une o centro O a qualquer ponto pertencente à circunferência.
- **Corda:** Segmento de reta cujas extremidades são dois pontos quaisquer que pertencem à circunferência.
- **Diâmetro (D):** É a corda que passa pelo centro da circunferência. O diâmetro constitui a maior corda possível de ser traçada na circunferência e sua medida equivale sempre ao dobro da medida do raio ($D = 2r$).
- **Arco:** Qualquer porção contínua da circunferência delimitada por dois de seus pontos.



3 O Número π e o Comprimento da Circunferência

Ao analisar diferentes circunferências, independentemente de seus tamanhos, nota-se uma propriedade geométrica fundamental: a razão entre o comprimento de uma circunferência (o seu perímetro) e a medida do seu respectivo diâmetro resulta sempre em um mesmo valor constante. Essa constante matemática é representada pela letra grega π (lê-se "pi").

Sendo C o comprimento da circunferência e D a medida do seu diâmetro, estabelece-se a seguinte relação:

$$\frac{C}{D} = \pi$$

Como o diâmetro equivale ao dobro do raio ($D = 2r$), é possível reescrever a igualdade para obter a fórmula direta do comprimento da circunferência:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

O número π é classificado como um número irracional, o que significa que possui infinitas casas decimais não periódicas (3,14159265...). Para a maioria dos cálculos e aplicações escolares, adota-se o valor aproximado de 3,14, a menos que o exercício forneça outra aproximação.

Destaque Histórico

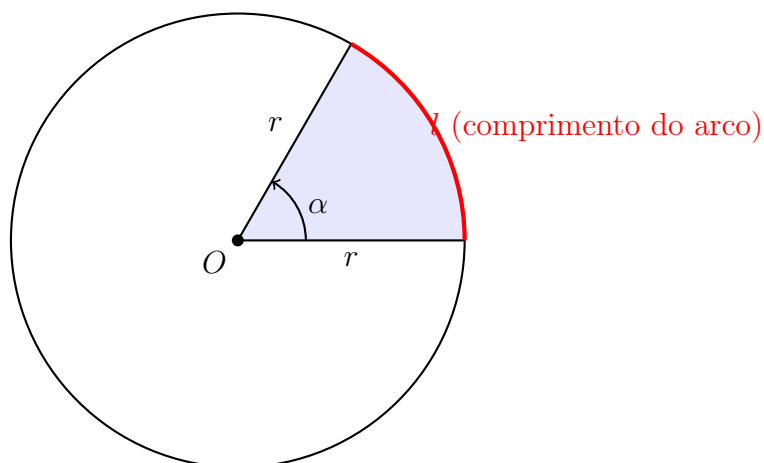
A busca por uma aproximação precisa para a constante π acompanha a história da matemática desde a Antiguidade. Há registros de que civilizações antigas, como os babilônios e os egípcios, já utilizavam aproximações empíricas para essa razão em suas obras de arquitetura e agricultura. O matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) foi um dos primeiros a calcular o valor de π de forma rigorosa, utilizando polígonos regulares inscritos e circunscritos na circunferência.

3.1 Comprimento de um Arco de Circunferência

O comprimento de um arco representa uma fração do comprimento total da circunferência, sendo diretamente proporcional à medida do ângulo central que o delimita. O cálculo dessa medida pode ser realizado por meio de uma regra de três simples, relacionando a volta completa (360°) com o perímetro total ($2\pi r$).

Seja um arco de comprimento l , delimitado por um ângulo central α medido em graus. A proporção é dada por:

$$\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{2\pi r}{l} \implies l = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r}{180^\circ}$$



4 Áreas Relacionadas ao Círculo

Enquanto o comprimento da circunferência refere-se à medida linear de seu contorno, a área de um círculo refere-se à medida da superfície da região plana delimitada por esse

contorno.

4.1 Área do Círculo

A área de um círculo de raio r é diretamente proporcional ao quadrado da medida do seu raio. A fórmula para a determinação da área total é expressa por:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Justificativa Geométrica

Para compreender a origem desta fórmula, recorre-se a uma demonstração visual que relaciona o círculo a um retângulo.

Considere um círculo de raio r e perímetro $C = 2\pi r$. Ao dividir este círculo em um número par de setores circulares de mesmas dimensões e reorganizá-los lado a lado, intercalando suas orientações, obtém-se uma figura que se assemelha a um paralelogramo.

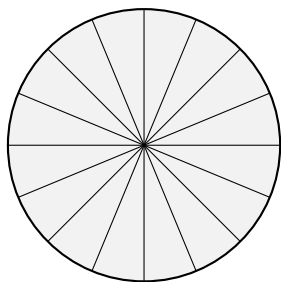
À medida que o círculo é dividido em um número cada vez maior de setores, as bases curvas dessas "fatias" tornam-se cada vez mais retas. No limite, se a divisão fosse feita em infinitos setores, a figura formada atingiria a forma de um retângulo perfeito.

As dimensões desse retângulo aproximado são:

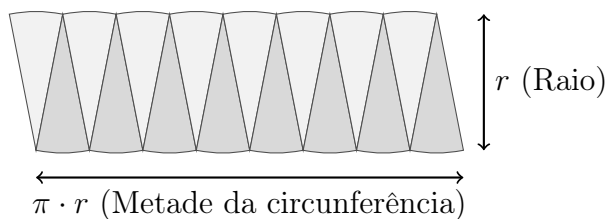
- **Altura:** equivale à medida do raio do círculo (r).
- **Base:** equivale à metade do comprimento da circunferência, uma vez que metade dos arcos forma a base superior e a outra metade forma a base inferior. Logo, a base mede $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$.

Como a área de um retângulo é calculada pelo produto da base pela altura, conclui-se que a área do círculo é:

$$A = \text{Base} \times \text{Altura} = (\pi \cdot r) \cdot r = \pi \cdot r^2$$



Círculo dividido em
16 setores iguais



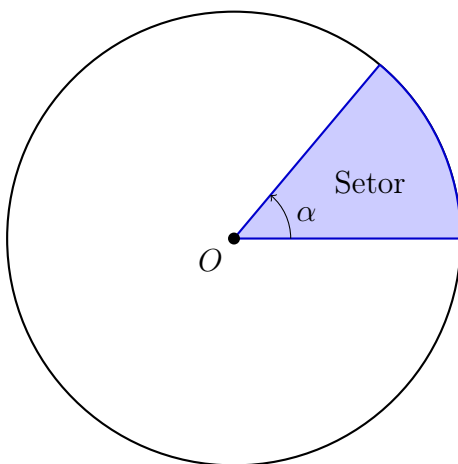
Setores reorganizados
formando a área retangular

4.2 Área do Setor Circular

O setor circular é a região do círculo delimitada por dois raios e pelo arco de circunferência correspondente a esses raios. É comum associar visualmente essa região a uma "fatia de pizza".

A área do setor circular é uma fração da área total do círculo, sendo diretamente proporcional à medida do ângulo central α . Relacionando a área total (associada a 360°) com a área do setor, obtém-se:

$$A_{\text{setor}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$



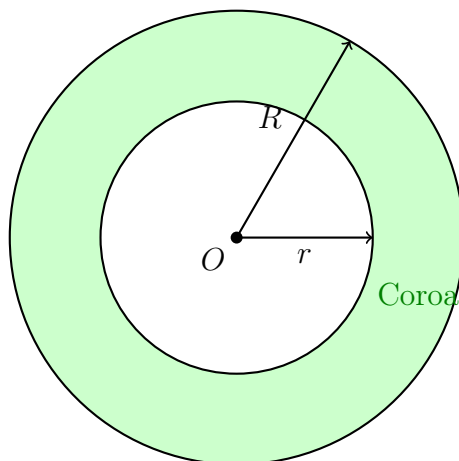
4.3 Área da Coroa Circular

A coroa circular é a região plana contida entre duas circunferências concêntricas (que possuem o mesmo centro), mas com raios de medidas diferentes. Seja R o raio da circun-

ferência maior e r o raio da circunferência menor.

A área da coroa circular é calculada subtraindo-se a área do círculo menor da área do círculo maior:

$$A_{\text{coroa}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$$

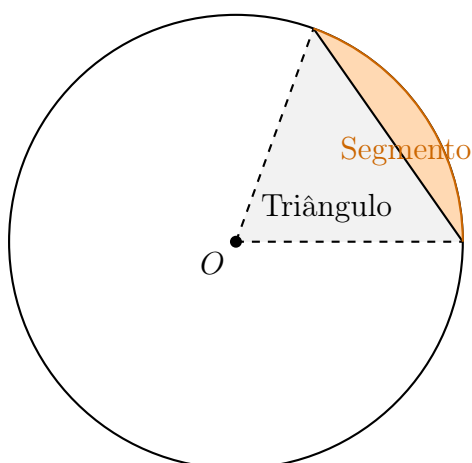


4.4 Área do Segmento Circular

O segmento circular é a região do círculo delimitada por uma corda e pelo arco correspondente a essa mesma corda.

Para determinar a área do segmento circular, constrói-se o setor circular correspondente (traçando os raios até as extremidades da corda). Em seguida, calcula-se a área desse setor circular e subtrai-se a área do triângulo formado pelos dois raios e a corda:

$$A_{\text{segmento}} = A_{\text{setor}} - A_{\text{triângulo}}$$



5 Exercícios

Exercício 1. Classifique as afirmações a seguir referentes aos conceitos geométricos como verdadeiras (V) ou falsas (F):

- a) A circunferência corresponde à região plana inteira, incluindo o seu interior.
- b) O diâmetro é a maior corda que pode ser traçada em uma circunferência e sua medida equivale ao dobro da medida do raio.
- c) A razão entre o comprimento de qualquer circunferência e a medida de seu diâmetro resulta em um valor variável, dependendo do tamanho da figura.
- d) Toda reta tangente a uma circunferência forma um ângulo de 90° com o raio no ponto de tangência.

Exercício 2. Determine o comprimento de uma circunferência cujo raio mede 5 cm.

(Adote a aproximação $\pi \approx 3,14$)

Exercício 3. Uma pista de atletismo possui formato perfeitamente circular com diâmetro medindo 40 m. Calcule a área total ocupada pela pista.

(Adote a aproximação $\pi \approx 3,14$)

Exercício 4. Considere uma circunferência de centro O e raio medindo 12 cm. Uma reta s encontra-se a uma distância de 8 cm do centro O .

- a) Classifique a posição relativa da reta s em relação à circunferência.
- b) Quantos pontos de interseção existem entre a reta e a circunferência?

Exercício 5. Calcule o comprimento de um arco delimitado por um ângulo central de 45° em uma circunferência de raio igual a 8 cm. Considere a resposta em função de π .

Exercício 6. Determine a área de um setor circular cujo ângulo central mede 60° , sabendo que o círculo correspondente possui raio de 6 cm. Considere a resposta em função de π .

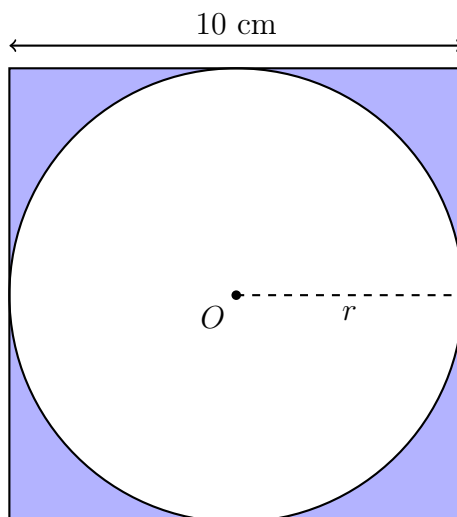
Exercício 7. Um canteiro circular possui 10 m de raio. Ao redor deste canteiro, foi construída uma calçada com largura constante de 2 m, formando uma coroa circular.

- a) Qual é a medida do raio do círculo maior que compreende o canteiro e a calçada?
- b) Calcule a área total destinada exclusivamente à calçada.

(Adote a aproximação $\pi \approx 3,14$)

Exercício 8. Na figura a seguir, um círculo está inscrito em um quadrado cujo lado mede 10 cm, ou seja, a circunferência tangencia os quatro lados do quadrado. Determine a área da região hachurada (colorida), que corresponde à região interna ao quadrado e externa ao círculo.

(Adote a aproximação $\pi \approx 3,14$)

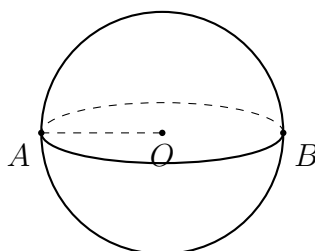


Exercício 9. Qual é o comprimento de uma circunferência que tem raio igual a 2,4 cm?

Use $\pi = 3,14$.

Exercício 10. Calcule a área do círculo que tem diâmetro igual a 20 cm. Use $\pi = 3,14$.

Exercício 11. Um inseto vai se deslocar sobre uma superfície esférica de raio 50 cm, desde um ponto A até um ponto B , diametralmente opostos, conforme a figura. Determine o comprimento do menor trajeto possível que o inseto pode percorrer.

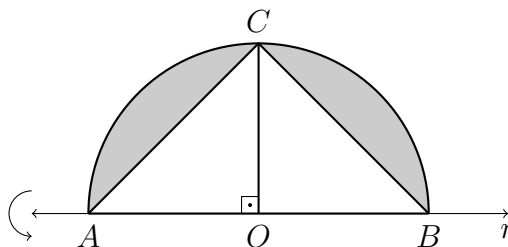


Exercício 12. Calcule a área de uma coroa circular onde o raio menor mede 2 cm e o raio maior é o triplo do raio menor.

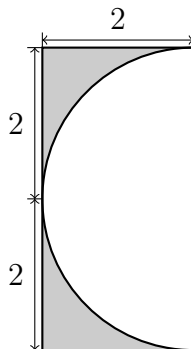
Exercício 13. Calcule o perímetro e a área de um setor circular de 30° e raio 2 cm.

Exercício 14. Determine a área de um círculo sabendo que a circunferência desse círculo tem comprimento igual a 15π cm.

Exercício 15. Calcule a área hachurada na figura abaixo, sabendo que o raio do círculo mede 2 cm.



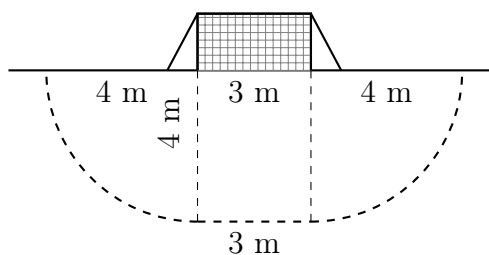
Exercício 16. Determine a área da região hachurada na figura a seguir.



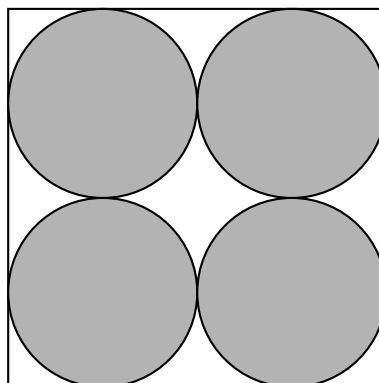
Exercício 17. Na campanha eleitoral para as recentes eleições realizadas no país, o candidato de um determinado partido realizou um comício que lotou uma praça circular com 100 m de raio. Supondo que, em média, havia 5 pessoas/m², determine a estimativa do número de pessoas presentes a esse comício.
(Use $\pi = 3,14$)

Exercício 18. No futebol de salão, a área de meta é delimitada por dois segmentos de reta (de comprimento de 11 m e 3 m) e dois quadrantes de círculos (de raio 4 m), conforme a figura. Determine a medida aproximada da superfície da área de meta.

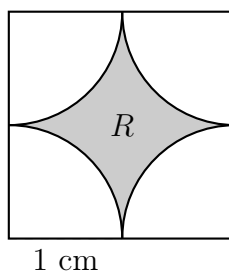
(Use $\pi = 3,14$)



Exercício 19. De uma chapa quadrada de papelão recortam-se 4 discos, conforme indicado na figura. Se a medida do diâmetro dos círculos é 10 cm, determine qual é a área (em cm^2) não aproveitada da chapa.

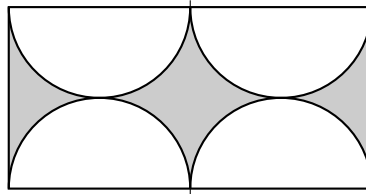


Exercício 20. Sabendo-se que os arcos de circunferência que aparecem nos cantos de um quadrado têm seus centros nos vértices do quadrado e que cada raio mede 1 cm, determine a área da região R .

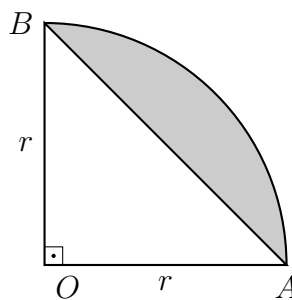


Exercício 21. Na figura a seguir, têm-se 4 semicírculos, dois a dois tangentes entre si e inscritos em um retângulo. Se o raio de cada semicírculo é 4 cm, determine a área da região sombreada, em centímetros quadrados.

(Use $\pi = 3,1$)



Exercício 22. O ponto O é o centro de uma circunferência de raio r , conforme a figura a seguir. Se $r = 4$ cm, calcule a área da região sombreada.



Resoluções

