Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

Material de Apoio e Lista de Exercícios

Equação do 1º Grau

Professor: **Danilo Kanno**

Guaratinguetá

1 Contextualização Histórica e Etimologia

O estudo das equações remonta à necessidade das civilizações antigas de resolver problemas práticos relacionados à partilha de terras, heranças e comércio. Contudo, a formalização algébrica vigente é fruto de uma longa evolução epistemológica.

O termo "álgebra"deriva da obra *Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala* ("O Livro Compendioso sobre o Cálculo por Restauração e Balanceamento"), escrita pelo matemático persa **Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi** por volta do século IX. O termo *al-jabr* referia-se à operação de "restauração", ou seja, a transposição de termos subtraídos para o membro oposto da equação como quantidades adicionadas, um conceito fundamental para a manipulação de equações lineares.

Antes da notação simbólica moderna, introduzida gradualmente por matemáticos como **François Viète** e **René Descartes** a partir do século XVI, as equações eram descritas de forma retórica. A consolidação da incógnita x e dos coeficientes literais permitiu a generalização que define a álgebra elementar contemporânea.

2 A "Regula Falsi" no Papiro de Rhind

Antes do desenvolvimento da álgebra simbólica, os escribas egípcios utilizavam uma técnica engenhosa conhecida como **Método da Falsa Posição** (*Regula Falsi*). No Papiro de Rhind (c. 1650 a.C.), o escriba Ahmes propõe problemas do tipo "Aha", que significa "uma quantidade desconhecida".

Para resolver uma equação como $x + \frac{x}{7} = 24$, o método consistia em:

a) **Chutar um valor falso** para x que facilitasse as contas (geralmente um múltiplo do denominador). Neste caso, supunha-se $x = 7$.

b) **Testar o valor:** $7 + \frac{7}{7} = 8$.

c) **Comparar com o alvo:** O resultado obtido (8) é menor que o resultado desejado (24).

d) **Ajustar proporcionalmente:** Como 24 é 3 vezes maior que 8 ($\frac{24}{8} = 3$), a solução verdadeira deve ser 3 vezes maior que o chute inicial.

e) **Solução:** $x = 7 \cdot 3 = 21$.

Este método intuitivo demonstra o raciocínio proporcional que antecedeu as regras de manipulação algébrica.

Curiosidade: O Colar Quebrado de Lilavati

Diferente da tradição grega, a matemática indiana antiga frequentemente apresentava seus problemas em forma de poesia. Um dos exemplos mais belos encontra-se na obra *Lilavati* (c. 1150 d.C.), escrita pelo matemático **Bhaskara II**.

O problema narra o rompimento de um colar durante um momento de afeto entre um casal:

> *"Em uma briga de amor, o colar da moça se rompeu.*
> *Um terço das pérolas caiu no chão;*
> *Um quinto ficou na cama;*
> *Um sexto foi encontrado pela moça;*
> *Um décimo foi recuperado pelo namorado;*
> *E seis pérolas ficaram presas ao fio.*
> *Diga-me, quantos eram as pérolas do colar?"*

Resolução:

Chamando o total de pérolas de x, traduzimos o poema para a equação:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + \frac{x}{10} + 6 = x$$

Calculando o MMC(3, 5, 6, 10) = 30 e eliminando os denominadores:

$$\begin{aligned} 10x + 6x + 5x + 3x + 180 &= 30x \\ 24x + 180 &= 30x \\ 180 &= 30x - 24x \\ 180 &= 6x \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Resposta: O colar era composto originalmente por 30 pérolas.

3 Definição Formal

Uma equação polinomial do 1º grau na incógnita x é qualquer sentença matemática aberta que pode ser reduzida à forma canônica:

$$ax + b = 0 \tag{1}$$

Onde:

- x é a incógnita (variável real);
- a e b são números reais, denominados coeficientes;
- $a \neq 0$ (condição de existência do grau 1).

A resolução da equação consiste em determinar o valor de x que satisfaz a igualdade, denominado **raiz** ou **solução** da equação.

4 Princípios de Equivalência

A manipulação algébrica para a resolução de equações baseia-se em dois axiomas fundamentais que garantem a manutenção da igualdade:

4.1 Princípio Aditivo

Se adicionarmos ou subtrairmos um mesmo número real k a ambos os membros de uma igualdade, a proposição se mantém verdadeira.

$$A = B \iff A + k = B + k$$

Este princípio fundamenta a transposição de termos entre os membros da equação.

Exemplo de Aplicação:

Considere a equação $x - 15 = 20$. Para isolar a incógnita, aplicamos o princípio aditivo somando 15 a ambos os membros da igualdade:

$$
\begin{aligned}
x - 15 + \mathbf{15} &= 20 + \mathbf{15} \\
x + 0 &= 35 \\
x &= 35
\end{aligned}
$$

Observe que o termo -15 foi "anulado" no primeiro membro, resultando no valor da incógnita.

4.2 Princípio Multiplicativo

Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros de uma igualdade por um mesmo número real k (com $k \neq 0$), a igualdade se preserva.

$$A = B \iff A \cdot k = B \cdot k$$

Este princípio justifica o isolamento da incógnita ao dividir a equação pelo coeficiente a.

Exemplo de Aplicação:
Considere a equação $3x = 27$. Para obter o valor de x, aplicamos o princípio multiplicativo dividindo ambos os membros pelo coeficiente da incógnita (ou multiplicando pelo inverso multiplicativo $\frac{1}{3}$):

$$
\begin{aligned}
3x &= 27 \\
\frac{3x}{3} &= \frac{27}{3} \\
1 \cdot x &= 9 \\
x &= 9
\end{aligned}
$$

Desta forma, transformamos o coeficiente 3 em 1 (elemento neutro da multiplicação), isolando o x.

5 Análise e Discussão das Soluções

Considerando a forma $ax = -b$, a natureza da solução depende estritamente dos valores assumidos pelos coeficientes a e b. Classificamos as equações lineares em três categorias:

a) **Equação Possível e Determinada (SPD):** Ocorre quando $a \neq 0$. Existe uma única solução real.

$$S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$

b) **Equação Possível e Indeterminada (SPI):** Ocorre quando $a = 0$ e $b = 0$. A equação assume a forma $0x = 0$, que é uma tautologia para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

$$S = \mathbb{R}$$

c) **Equação Impossível (SI):** Ocorre quando $a = 0$ e $b \neq 0$. A equação assume a forma $0x = -b$ (com $b \neq 0$), o que constitui um absurdo matemático.

$$S = \emptyset$$

5.1 Exemplos Práticos de Classificação

1. Equação Possível e Determinada (SPD)

Ocorre quando chegamos a um valor único para a incógnita.

$$\begin{aligned} 3(x-2) &= 12 \\ 3x - 6 &= 12 \\ 3x &= 18 \\ x &= 6 \quad \text{(Solução única)} \end{aligned}$$

2. Equação Possível e Indeterminada (SPI)

Ocorre quando a manipulação leva a uma verdade absoluta (tautologia), indicando que qualquer número real serve como solução.

$$
\begin{aligned}
2(x+1) &= 2x+2 \\
2x+2 &= 2x+2 \\
2x-2x &= 2-2 \\
0x &= 0 \quad \text{(Verdadeiro para todo } x \in \mathbb{R}\text{)}
\end{aligned}
$$

Interpretação: Pense no problema "Qual é o número que, dobrado e somado a 2, é igual ao seu dobro somado a 2?". A resposta é: qualquer número.

3. Equação Impossível (SI)

Ocorre quando a manipulação leva a uma contradição matemática (absurdo).

$$
\begin{aligned}
x+5 &= x+8 \\
x-x &= 8-5 \\
0x &= 3 \\
0 &= 3 \quad \text{(Absurdo!)}
\end{aligned}
$$

Interpretação: Não existe número que multiplicado por zero resulte em 3. O conjunto solução é vazio ($S = \emptyset$).

6 Conjunto Universo e Conjunto Solução

Para resolver uma equação com rigor matemático, não basta encontrar um valor para x; é necessário verificar se esse valor faz sentido dentro do contexto do problema. Para isso, definimos dois conjuntos fundamentais:

6.1 Conjunto Universo (U)

É o conjunto de todos os valores que a incógnita *poderia* assumir. Ele representa o contexto numérico em que estamos trabalhando.

- Se estamos contando pessoas, $U = \mathbb{N}$ (Naturais).
- Se estamos medindo temperaturas ou lidando com dívidas, $U = \mathbb{Z}$ (Inteiros).
- Se estamos trabalhando com medidas precisas, $U = \mathbb{R}$ (Reais).

6.2 Conjunto Solução (S)

Também chamado de Conjunto Verdade (V), é o subconjunto do Conjunto Universo contendo os valores que tornam a equação verdadeira.

$$S \subset U$$

Importante: Um valor encontrado algebricamente só fará parte do Conjunto Solução se ele pertencer ao Conjunto Universo. Caso contrário, ele deve ser descartado.

6.3 Exemplo de Dependência do Universo

Considere a equação $2x + 10 = 0$. Resolvendo-a algebricamente:

$$2x = -10$$
$$x = -5$$

A determinação do Conjunto Solução depende do Universo estipulado:

a) **Caso 1:** Se o universo for os Números Inteiros ($U = \mathbb{Z}$).
Como -5 é um número inteiro, a solução é válida.

$$S = \{-5\}$$

b) **Caso 2:** Se o universo for os Números Naturais ($U = \mathbb{N}$).
Como -5 **não** é um número natural (não é positivo), o valor encontrado não serve. A equação não tem solução dentro deste conjunto.

$$S = \emptyset$$

Nota: É por isso que sempre devemos perguntar "em que conjunto estamos trabalhando?" antes de dar a resposta final de uma equação.

7 Linguagem Algébrica: A Arte da Tradução

Grande parte da dificuldade em resolver problemas matemáticos reside não no cálculo, mas na interpretação do texto. A álgebra funciona como um idioma preciso. Abaixo, apresentamos um "dicionário" para traduzir sentenças da língua portuguesa para expressões matemáticas.

Linguagem Corrente	**Linguagem Algébrica**
Um número desconhecido	x
O dobro de um número	$2x$
A terça parte de um número	$\frac{x}{3}$
O quadrado de um número	x^2
Dois números consecutivos	x e $x+1$
O antecessor de um número	$x-1$
A soma de dois números é 10	$x+y=10$

Exemplo de Modelagem:
"A soma de um número com sua metade é igual a 15."
Tradução: $x + \frac{x}{2} = 15$

8 Resolução de Equações com Coeficientes Racionais

Quando a equação apresenta termos fracionários, a estratégia mais eficiente consiste em eliminar os denominadores utilizando o Mínimo Múltiplo Comum (MMC), transformando a equação em uma equivalente com coeficientes inteiros.

Roteiro de Resolução:

a) Calcule o MMC de todos os denominadores da equação.

b) Divida o MMC pelo denominador antigo e multiplique pelo numerador (processo de redução ao mesmo denominador).

c) Uma vez que os denominadores são iguais em **ambos** os lados da igualdade, podemos cancelá-los (pelo Princípio Multiplicativo).

d) Resolva a equação resultante.

Exemplo Resolvido:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$$

Passo 1: O MMC(2, 3) = 6.

Passo 2: Reescrevemos as frações:

$$\frac{3 \cdot x}{6} + \frac{2 \cdot x}{6} = \frac{6 \cdot 10}{6}$$

$$\frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = \frac{60}{6}$$

Passo 3: Cancelamos os denominadores:

$$3x + 2x = 60$$

Passo 4: Resolvemos:

$$5x = 60 \implies x = 12$$

9 Exercícios

Exercício 1. Resolva as seguintes equações:

a) $x + 5 = 8$

b) $x - 4 = 3$

c) $x + 6 = 5$

d) $x - 7 = -7$

e) $x + 9 = -1$

f) $x - 39 = -79$

g) $10 = x + 8$

h) $15 = x + 20$

i) $4 = x - 10$

j) $7 = x + 8$

k) $x - 1 = 5$

l) $2x + 4 = 16$

m) $3x = 15$

n) $2x = 10$

o) $3x = -9$

p) $2x - 2 = 12 - 5x$

q) $3x - 13 = 8$

r) $4x - 9 = 23$

s) $7x - 33 = -12$

t) $33 + x = 5 - 3x$

u) $2x = 14$

v) $7x = -21$

w) $4x = -12$

x) $35x = -105$

Exercício 2. Resolva as seguintes equações:

a) $9x - 2 = 4x + 18$

b) $2x - 10 + 7x + 10 = 180$

c) $7y - 10 = y + 50$

d) $4x - 18 + 3x = 10$

e) $2x + 5 + x + 7 = 18$

f) $5x - 91 = 4x - 77$

g) $7x + 1 = 5x - 7$

h) $4x + 5 = x + 20$

i) $3(x + 1) + 2(2x - 3) = 5(x - 1) + 8$

j) $2(x + 5) - 4 = 26$

k) $3(x + 3) - 5 = 22$

l) $2(2x + 7) + 3(3x - 5) = 3(4x - 5) - 1$

m) $3(x + 2) = 2(x - 7)$

n) $4(2x - 1) = 3(x + 2)$

o) $4(2m - 1) + 3m = 2(4m - 1) - (2 - m)$

p) $3(x + 3) - 1 = 2$

q) $3(x + 2) - 1 = 2(x + 3) - 7$

r) $3(x + 1) + 2 = 5 + 2(x - 1)$

s) $3(2x - 3) + x = 5$

t) $3x + 5 + 2x + 6 = x + 27$

u) $2(x - 1) + 3(x + 1) = 4(x + 2)$

v) $3(3x + 8) - 5x = x - 3$

w) $5(2x - 1) = 3(x + 10)$

x) $2(x - 3) + 8x + 4 = 5(x + 2)$

Exercício 3. Resolva as seguintes equações:

a) $\frac{x}{2} = 18$

b) $\frac{x}{3} = 5$

c) $\frac{x}{4} = 10$

d) $\frac{x}{5} = 8$

e) $\frac{x}{6} = 11$

f) $\frac{x}{7} = 9$

g) $\frac{x}{8} = 8$

h) $\frac{x}{9} = 12$

i) $\frac{x}{2} = 1$

j) $\frac{x}{6} = 7$

k) $\frac{x}{7} = 8$

l) $\frac{x}{5} = 18$

m) $\frac{2x + 5}{3} = 3$

n) $\frac{3x + 4}{5} = 2$

o) $\frac{3x + 8}{5} = 4$

p) $\frac{4x - 5}{3} = 5$

q) $\frac{5x - 4}{6} = 6$

r) $\frac{x + 18}{5} = 5$

s) $\frac{x + 8}{4} = 6$

t) $\frac{x - 5}{7} = 1$

u) $\frac{2x + 14}{10} = 3$

v) $\frac{3x - 3}{8} = 3$

w) $\frac{4x + 8}{11} = 4$

x) $\frac{5x + 10}{9} = 5$

Exercício 4. Resolva as seguintes equações:

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$

b) $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 7$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 7$

d) $\frac{x}{5} + \frac{x}{3} = 8$

e) $\frac{x}{2} + \frac{x}{6} = 4$

f) $\frac{x}{8} + \frac{x}{6} = 7$

g) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 13$

h) $\frac{x + 1}{4} + \frac{x - 1}{2} = 2$

i) $\frac{x + 2}{4} + \frac{x + 3}{5} = 2$

j) $\frac{x + 3}{4} + \frac{x + 1}{6} = 3$

k) $\frac{x + 8}{5} + \frac{x + 2}{2} = 4$

l) $\frac{x + 6}{3} + \frac{x + 8}{7} = 6$

m) $\dfrac{2(x-1)}{3}+\dfrac{3(2x+1)}{9}=9$

n) $\dfrac{2(2x+2)}{2}+\dfrac{2(x+6)}{3}=14$

o) $\dfrac{3(x+4)}{14}+\dfrac{2(2x+1)}{7}=9$

p) $\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{x+5}{5}$

q) $\dfrac{v+9}{3}++\dfrac{v+5}{4}+\dfrac{v+7}{8}=8$

r) $\dfrac{y-1}{4}-\dfrac{7-3}{5}=\dfrac{1-2y}{20}$

s) $\dfrac{3x+9}{4}-\dfrac{5x+16}{7}=0$

t) $\dfrac{p-5}{6}+\dfrac{2-p}{3}-\dfrac{p-6}{5}=-3$

u) $\dfrac{4x+1}{3}-\dfrac{2-3x}{4}=\dfrac{26-x}{6}$

Exercício 5. O dobro de um número somado com 5 é igual a 91. Qual é esse número?

Exercício 6. O triplo de um número diminuído de 4 é igual a 23. Qual é esse número?

Exercício 7. O número somado com o seu dobro é igual a 150. Qual é esse número?

Exercício 8. Qual é o número que adicionado a 28 é o mesmo que 3 vezes esse número?

Exercício 9. O triplo de um número, menos 10 é igual ao próprio número mais 70. Qual é esse número?

Exercício 10. Num estacionamento há carros e motos, totalizam 85 veículos. O número de carros é igual a 4 vezes o número de motos. Quantas motos há no estacionamento?

Exercício 11. Lucia é 5 anos mais velha que Claudia. A soma das idades é 43anos.Qual a idade de Claudia?

Exercício 12. Quando Pedro nasceu, Guilherme tinha 3 anos. Atualmente a soma das idades é 23 anos. Qual é a idade de Guilherme?

Exercício 13. O perímetro de um retângulo mede 92cm. Quais são suas medidas, sabendo que o comprimento tem 8cm a mais que a largura?

Exercício 14. O perímetro de um retângulo mede 100cm. Quais são suas medidas, sabendo que o comprimento tem 10cm a mais que a largura?

Exercício 15. Cezar tem 15 lápis a mais que Osmar e José tem 12 lápis a menos que Osmar. O total de lápis é 63. Quantos lápis Osmar tem?

Exercício 16. A soma de um número com o dobro do consecutivo dá 206.Qual é o número?

Exercício 17. O triplo de um número menos o consecutivo daquele número dá 139. Qual é esse número?

Exercício 18. Um número somado com sua metade é igual a 45. Qual é esse número?

Exercício 19. Um número somado com sua metade é igual a 15. Qual é esse número?

Exercício 20. Um número somado com sua quarta parte é igual 20. Qual é esse número?

Exercício 21. A metade do número de figurinhas de um envelope mais a terça parte do número dessas figurinhas dá 60. Qual é esse número?

Exercício 22. A terça parte de um número menos a sua quinta parte resulta 16. Qual é esse número?

Exercício 23. A soma de um número com o seu dobro e sua terça parte é 30. Qual é esse número?

Exercício 24. O dobro de um número, menos 10 é igual a sua metade mais 35. Qual é esse número?

Resoluções