



Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

Material de Apoio e Lista de Exercícios

Função Afim

Professor: Danilo Kanno

Guaratinguetá

1 Definição de Função Afim

Define-se como função afim, também conhecida como função polinomial do 1º grau, toda função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuja lei de formação pode ser expressa por:

$$f(x) = ax + b$$

em que a e b são números reais constantes, com a condição de que $a \neq 0$.

Nesta estrutura, o termo x representa a variável independente, cujo valor pertence ao domínio da função, enquanto $f(x)$, frequentemente substituído por y , representa a variável dependente, cujo valor varia em função de x .

2 Coeficientes da Função

Os parâmetros a e b presentes na lei de formação recebem denominações específicas e possuem papéis fundamentais na interpretação analítica e geométrica da função:

- **Coeficiente Angular (a):** Também denominado taxa de variação, determina o quão rápido o valor da função cresce ou decresce. Geometricamente, este coeficiente está associado à inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas (eixo x).
- **Coeficiente Linear (b):** Representa o valor assumido pela função quando a variável independente é nula, ou seja, $f(0) = b$. No plano cartesiano, indica a ordenada do ponto exato onde a reta intercepta o eixo vertical (eixo y).

Exemplo 1. Considere a função afim dada por $f(x) = 2x - 5$. Nesta lei de formação, identifica-se o coeficiente angular $a = 2$ e o coeficiente linear $b = -5$.

Para calcular o valor numérico num ponto específico, substitui-se a variável x pelo valor desejado. Caso deseje-se o valor da função para $x = 3$, o cálculo é realizado da seguinte maneira:

$$f(3) = 2(3) - 5$$

$$f(3) = 6 - 5$$

$$f(3) = 1$$

3 Raiz ou Zero da Função

Denomina-se raiz ou zero da função afim o valor real de x para o qual a função se anula, isto é, $f(x) = 0$. Geometricamente, a raiz representa a abscissa do ponto onde a reta intercepta o eixo horizontal (eixo x).

Para determinar a raiz da função $f(x) = ax + b$, basta igualar a expressão a zero e isolar a variável x :

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Exemplo 2. Para encontrar o zero da função $f(x) = 2x - 6$, iguala-se a expressão a zero:

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Logo, conclui-se que o gráfico desta função intercepta o eixo x no ponto $(3, 0)$.

4 A Importância da Representação Gráfica e os Pares Ordenados

A álgebra permite determinar valores exatos e modelar situações-problema por meio de equações. No entanto, a análise puramente numérica de uma função pode ocultar tendências e comportamentos globais. Por esse motivo, recorre-se à representação gráfica, uma ferramenta que traduz as relações algébricas em elementos visuais, conectando a álgebra à geometria.

Para que essa tradução seja possível, utiliza-se o conceito de par ordenado. Como a função afim estabelece uma relação de dependência entre duas variáveis, x e y (em que $y = f(x)$), cada valor atribuído à variável x gera um único valor correspondente para y .

Essa correspondência forma um agrupamento de dois números, denotado genericamente por (x, y) . A palavra "ordenado" indica que a posição dos elementos é rigorosa e não pode ser invertida:

- O **primeiro elemento** (x) representa a variável independente, sendo localizado no eixo horizontal (eixo das abscissas).
- O **segundo elemento** (y ou $f(x)$) representa a variável dependente, sendo localizado no eixo vertical (eixo das ordenadas).

Ao calcular diferentes valores para a função e organizar seus respectivos pares ordenados, é possível marcar esses pontos no plano cartesiano. A união de todos os infinitos pontos que satisfazem a lei de formação $f(x) = ax + b$ revela a "forma" da função, permitindo uma leitura imediata de seu comportamento.

5 Representação Gráfica

O gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é sempre uma reta oblíqua aos eixos coordenados. Para traçar essa reta no plano cartesiano, é suficiente determinar dois pontos distintos que pertençam a ela. Na prática, é bastante conveniente utilizar os pontos de interseção com os eixos coordenados:

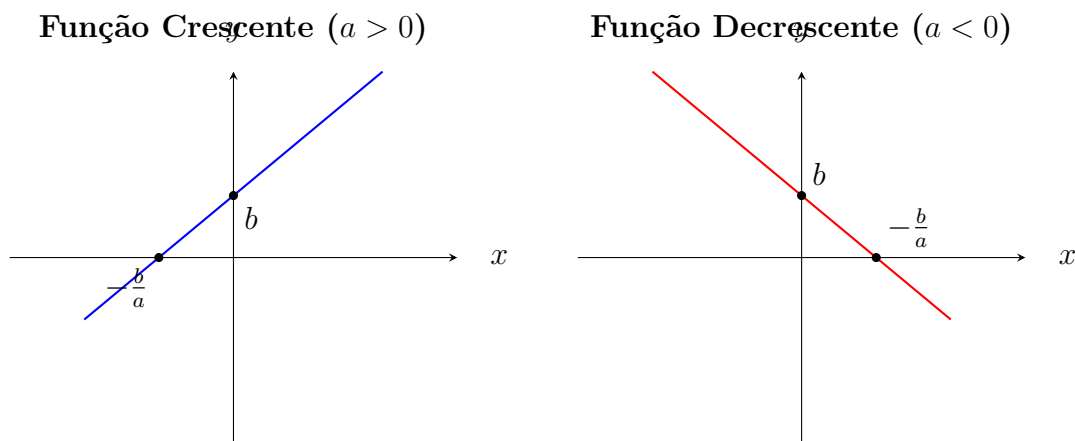
- **Interseção com o eixo y :** Ocorre quando $x = 0$, resultando no ponto $(0, b)$.
- **Interseção com o eixo x :** Ocorre quando $y = 0$, resultando na raiz da função, ou seja, no ponto $(-\frac{b}{a}, 0)$.

A inclinação da reta depende diretamente do sinal do coeficiente angular (a), o que permite classificar a função quanto ao seu crescimento:

- **Função Crescente** ($a > 0$): Conforme os valores da variável x aumentam, os valores assumidos por $f(x)$ também aumentam.

- **Função Decrescente** ($a < 0$): Conforme os valores da variável x aumentam, os valores assumidos por $f(x)$ diminuem.

Abaixo, ilustram-se os dois comportamentos por meio de esboços gráficos genéricos:



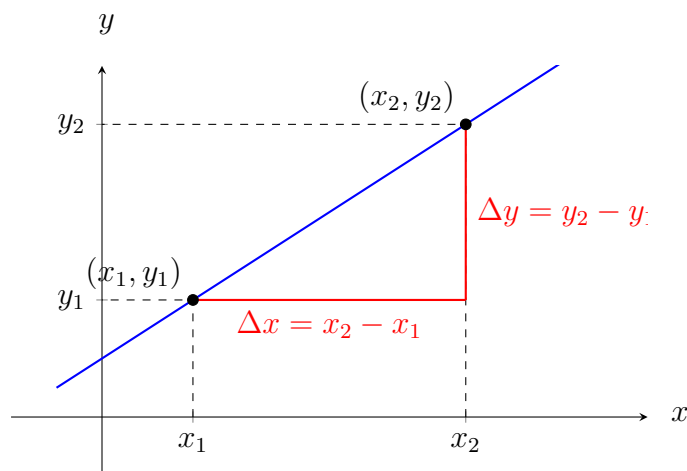
6 Determinação da Lei de Formação

Uma função afim fica perfeitamente determinada quando são conhecidas as coordenadas de dois pontos distintos pertencentes ao seu gráfico. Sejam os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pertencentes à reta descrita pela função $f(x) = ax + b$.

Para encontrar os valores dos coeficientes a e b , pode-se construir um sistema de equações do primeiro grau substituindo as coordenadas dos pontos na lei de formação. Alternativamente, o coeficiente angular (a) pode ser calculado de forma direta pela razão entre a variação das ordenadas (Δy) e a variação das abscissas (Δx):

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A representação geométrica a seguir ilustra como essas variações formam um triângulo retângulo, em que a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ determina a inclinação da reta:



Após a obtenção do coeficiente angular, substitui-se o valor de a e as coordenadas de qualquer um dos pontos conhecidos na equação geral para determinar o coeficiente linear (b).

Exemplo 3. Considere que o gráfico de uma função afim passa pelos pontos $(1, 5)$ e $(3, 11)$. Para determinar sua lei de formação, calcula-se inicialmente o coeficiente a :

$$a = \frac{11 - 5}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Sabendo que $a = 3$, a função assume a forma temporária $f(x) = 3x + b$. Para encontrar b , substituem-se as coordenadas de um dos pontos, por exemplo, o ponto $(1, 5)$, em que $x = 1$ e $f(x) = 5$:

$$5 = 3(1) + b$$

$$b = 5 - 3$$

$$b = 2$$

Logo, a lei de formação procurada é $f(x) = 3x + 2$.

7 Interseção de Gráficos

Quando duas funções afins, $f(x)$ e $g(x)$, são representadas no mesmo plano cartesiano, suas retas podem ser concorrentes (interceptam-se em um único ponto) ou paralelas.

Para determinar algebricamente as coordenadas do ponto de interseção de duas retas concorrentes, igualam-se as leis de formação das funções, resolvendo-se a equação $f(x) = g(x)$.

A solução desta equação fornece a abscissa (x) do ponto de encontro. Em seguida, substitui-se este valor em qualquer uma das funções para obter a ordenada (y) correspondente.

Exemplo 4. Dadas as funções $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = -2x + 13$, determina-se o ponto de interseção igualando-as:

$$3x - 2 = -2x + 13$$

$$3x + 2x = 13 + 2$$

$$5x = 15$$

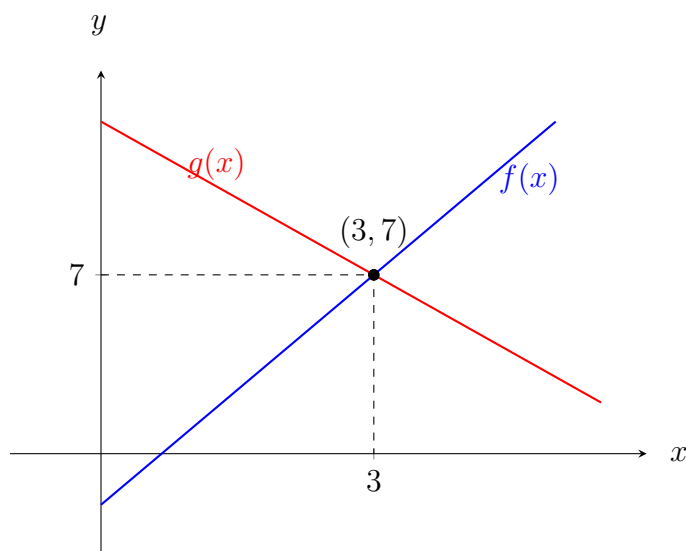
$$x = 3$$

Para encontrar a ordenada correspondente, substitui-se $x = 3$ em $f(x)$ ou $g(x)$:

$$f(3) = 3(3) - 2 = 9 - 2 = 7$$

Portanto, as retas se cruzam exatamente no ponto de coordenadas $(3, 7)$.

A representação gráfica do sistema formado por essas duas funções ilustra geometricamente a solução encontrada. O ponto onde as retas se cruzam corresponde exatamente ao par ordenado calculado:



8 Aplicações Práticas e Modelagem Matemática

A função afim é uma ferramenta matemática rigorosa e eficiente para descrever situações do cotidiano que envolvem taxas de variação constantes. Em diversos problemas práticos — como cálculo de tarifas, conversão de unidades ou análise de custos —, a lei de formação $f(x) = ax + b$ é utilizada para modelar a relação entre duas grandezas.

Nesses contextos aplicados, os coeficientes adquirem significados reais específicos:

- O **coeficiente linear** (b) geralmente representa um valor fixo, como um custo inicial, uma tarifa básica (bandeirada) ou uma quantidade de partida, que independe da variável em análise.
- O **coeficiente angular** (a) representa o valor variável, caracterizando a taxa de crescimento, o custo por unidade produzida, a quantia cobrada por quilômetro rodado ou por hora de serviço.

Exemplo 5. Um profissional de manutenção cobra um valor fixo de R\$ 40,00 pela visita técnica, acrescido de R\$ 30,00 por hora de trabalho. O valor total a ser pago (V) em função do tempo em horas (h) pode ser modelado algébricamente por:

$$V(h) = 30h + 40$$

Nesta modelagem, constata-se que 40 é o coeficiente linear (valor fixo) e 30 é o coeficiente angular (taxa variável). Para um serviço que demande 3 horas de execução, o valor cobrado será:

$$V(3) = 30(3) + 40$$

$$V(3) = 90 + 40$$

$$V(3) = 130$$

O custo final do serviço será, portanto, de R\$ 130,00.

9 Exercícios

Exercício 1. Calcule o valor de $f(x) = 2x + 3$ para $x = -1, 0, 2$.

Exercício 2. Dada a função $f(x) = 3x - 7$.

- a) Qual é o coeficiente angular e o coeficiente linear?
- b) O ponto $(2, 2)$ pertence à reta da função? Justifique.
- c) Para qual valor de x a função vale zero?

Exercício 3. Determine os pontos de interseção das funções a seguir com os eixos coordenados.

- | | |
|--------------------|-----------------------------|
| a) $f(x) = -x + 4$ | c) $f(x) = -2 - x$ |
| b) $f(x) = 2x - 6$ | d) $f(x) = \frac{x}{4} + 1$ |

Exercício 4. Um estacionamento cobra uma taxa fixa de R\$8,00 e mais R\$2,00 por hora.

- a) Escreva a função que representa o valor a pagar em função do número de horas.
- b) Quanto pagará alguém que ficar 5 horas?
- c) A partir de quantas horas o valor ultrapassa R\$20,00?

Exercício 5. Duas funções são dadas: $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -x + 7$

- a) Determine o ponto de interseção dos gráficos.
- b) Para quais valores de x temos $f(x) > g(x)$?

Exercício 6. Encontre a lei de formação da função que passa pelos pontos $(0, 2)$ e $(3, 8)$.

Exercício 7. Em certa cidade, uma corrida de táxi custa R\$4,80 a bandeirada, mais R\$0,40 por quilômetro rodado. Quanto custa uma corrida de 50 quilômetros desse táxi?

Exercício 8. Em uma corrida de táxi, é cobrado um valor inicial chamado de bandeirada, mais uma quantia proporcional por quilômetro rodado. Se por uma corrida de 8km paga-se R\$28,50 e por uma corrida de 5km paga-se R\$19,50 qual é o valor da bandeirada?

Exercício 9. O grau Fahrenheit (símbolo: $^{\circ}\text{F}$) é uma escala de temperatura proposta por Daniel Gabriel Fahrenheit em 1724. Nesta escala, o ponto de fusão da água (0°C) é de 32°F e o ponto de ebulição da água (100°C) é de 212°F . Sabendo que a temperatura na escala Fahrenheit é dada por uma função afim da escala Celsius, determine em qual temperatura na escala Celsius ambas assinalam o mesmo valor numérico?

Exercício 10. Uma função f definida de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}^+$, crescente, satisfaz a equação $f(5x) = 5 \cdot f(x)$ para todo x real não negativo. Se $f(25) = 125$, então qual o valor de $f(1)$?

Exercício 11. João, ao perceber que seu carro apresentara um defeito, optou por alugar um veículo para cumprir seus compromissos de trabalho. A locadora, então, apresentou-lhe duas propostas:

- a) Plano A: no qual é cobrado um valor fixo de R\$50,00 e mais R\$1,60 por quilômetro rodado;
- b) Plano B: no qual é cobrado um valor fixo de R\$64,00 mais R\$1,20 por quilômetro rodado.

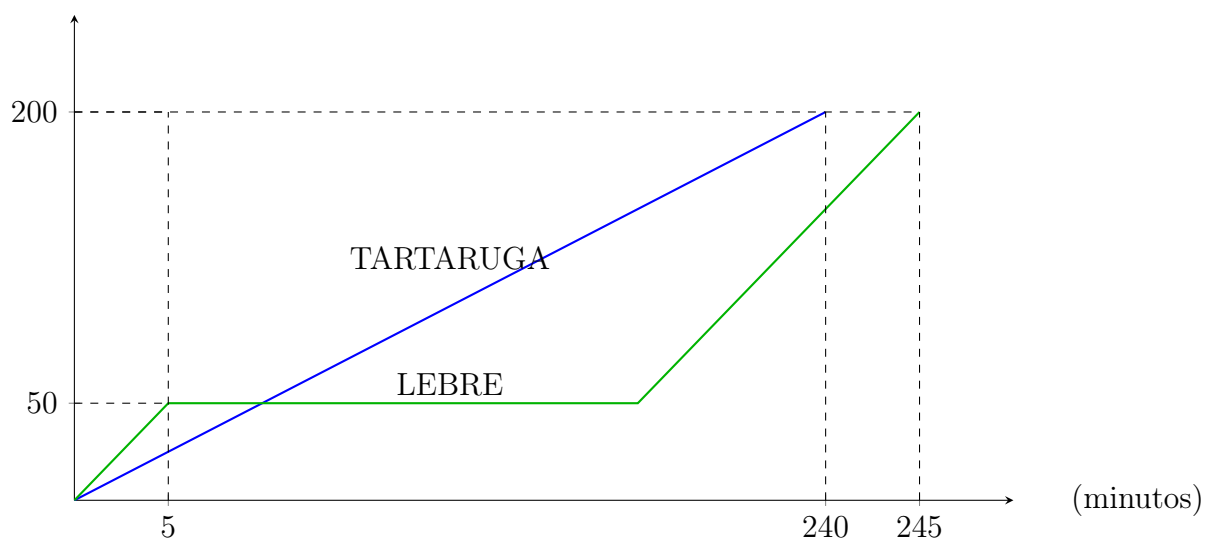
João observou que, para um certo deslocamento que totalizava k quilômetros, era indiferente optar pelo plano A ou pelo plano B, pois o valor final a ser pago seria o mesmo. Qual é o valor de k ?

Exercício 12. Uma função afim tem raiz $x=4$ e passa pelo ponto $(6,10)$.

- a) Determine a lei da função.
- b) Escreva sua equação na forma $f(x) = ax + b$

Exercício 13. Sabendo que uma função afim satisfaz: $f(2) = 8$ e $f(5) = 20$. Determine a lei de formação da função e encontre $f(0)$.

Exercício 14. A fábula da lebre e da tartaruga foi recontada utilizando-se o gráfico para descrever os deslocamentos dos animais.
(metros)

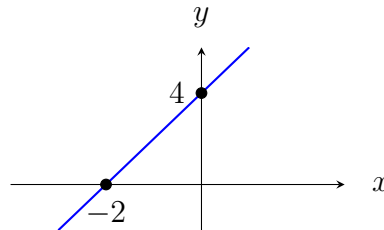


- a) Determine após quanto tempo a tartaruga alcançou a lebre.
- b) Determine por quanto tempo a lebre ficou dormindo.

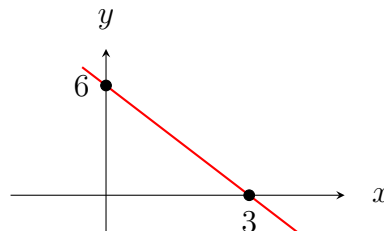
OBS: A velocidade da lebre após acordar é a mesma de antes de dormir.

10 Lista Complementar - Pontos Críticos da Função Afim

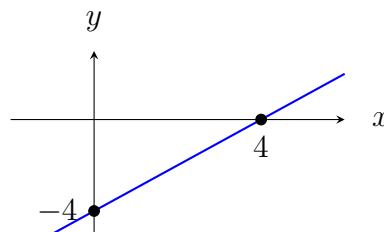
Exercício 15. Determine a lei de formação da função cujo gráfico está esboçado abaixo.



Exercício 16. Determine a lei de formação da função cujo gráfico está esboçado abaixo.



Exercício 17. Determine a lei de formação da função cujo gráfico está esboçado abaixo.



Exercício 18. Determine a lei de formação da função cujo gráfico está esboçado abaixo.

