



Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

Material de Apoio e Lista de Exercícios

Função Quadrática

Professor: Danilo Kanno

Guaratinguetá

1 Introdução e Definição Formal

No estudo da matemática, a função quadrática, também conhecida como função polinomial do 2º grau, apresenta grande relevância devido às suas diversas aplicações. Ela é empregada na modelagem de fenômenos físicos, como o movimento de corpos em queda livre, e na resolução de problemas que envolvem a maximização ou minimização de grandezas.

Definição

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada **função quadrática** quando existem números reais a , b e c , com $a \neq 0$, tais que sua lei de formação é dada por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Os números reais a , b e c são chamados de **coeficientes** da função. Cada um deles recebe uma nomenclatura específica no contexto do polinômio:

- a é o coeficiente do termo quadrático (ou coeficiente principal);
- b é o coeficiente do termo linear;
- c é o termo independente (ou coeficiente constante).

A condição $a \neq 0$ é estritamente necessária. Caso o valor de a fosse nulo, o termo ax^2 seria anulado e a lei de formação se reduziria a $f(x) = bx + c$, configurando uma função afim (ou do 1º grau), e não mais uma função quadrática.

Identificação dos Coeficientes

Para a correta manipulação e análise da função quadrática, é indispensável a identificação precisa de seus coeficientes. É importante ressaltar que o sinal que acompanha o número faz parte do coeficiente. Observe os casos a seguir.

Exemplo 1. Dada a função $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, temos:

- $a = 2$
- $b = -3$
- $c = 5$

Trata-se de uma função quadrática completa, pois todos os seus coeficientes são não nulos.

Exemplo 2. Na função $g(x) = -x^2 + 7$, nota-se a ausência do termo em x . Neste caso, os coeficientes são:

- $a = -1$
- $b = 0$
- $c = 7$

Por apresentar o coeficiente $b = 0$, esta é classificada como uma função quadrática incompleta.

Exemplo 3. Considere a função $h(x) = \frac{x^2}{3} - 4x$. Seus coeficientes são dados por:

- $a = \frac{1}{3}$
- $b = -4$
- $c = 0$

Novamente, observa-se uma função quadrática incompleta, pois o termo independente é nulo.

2 O Gráfico: A Parábola

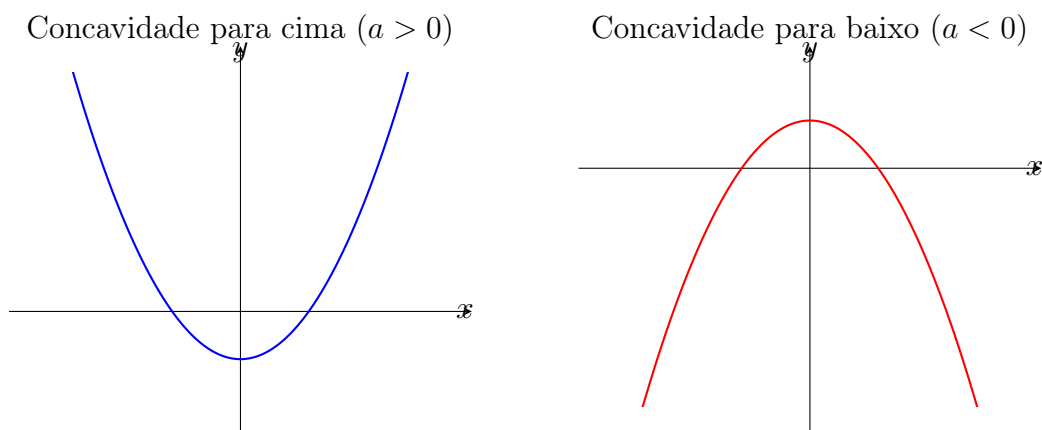
A representação gráfica de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, em um plano cartesiano, é uma curva plana denominada parábola. Diferentemente das funções afins, cujo gráfico é uma reta, a parábola apresenta um comportamento não linear, com características geométricas diretamente influenciadas pelos coeficientes da função.

2.1 A Concavidade da Parábola

O coeficiente a (coeficiente do termo quadrático) determina a orientação da abertura da curva, característica conhecida como concavidade. Como, por definição, $a \neq 0$, existem apenas duas possibilidades para o sinal deste coeficiente:

- **Se $a > 0$:** A parábola possui concavidade voltada para cima.
- **Se $a < 0$:** A parábola possui concavidade voltada para baixo.

Abaixo, apresentam-se esboços gráficos que ilustram essas duas situações geométricas.



2.2 Intersecção com o Eixo das Ordenadas

O coeficiente c (termo independente) indica o ponto exato onde a parábola cruza o eixo vertical (eixo das ordenadas, ou eixo y).

Para determinar analiticamente esse ponto, basta calcular o valor numérico da função para a abscissa $x = 0$:

$$f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 0 + 0 + c = c$$

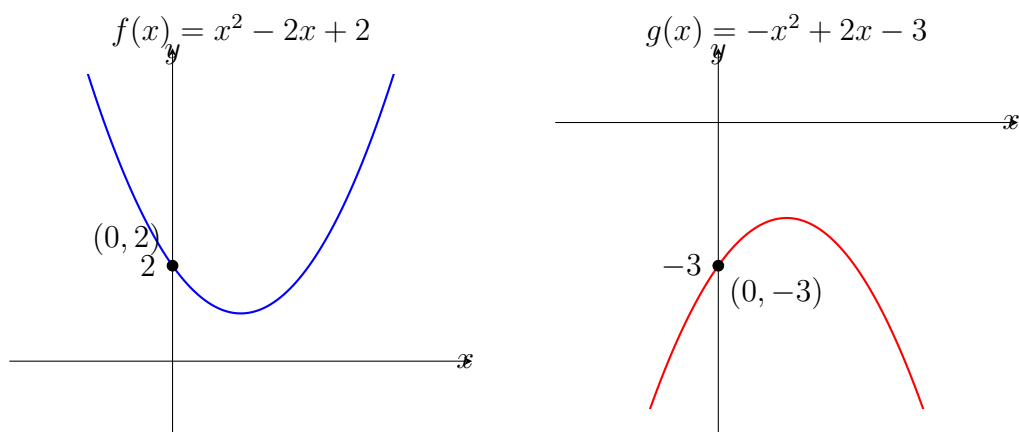
Logo, conclui-se que o gráfico sempre interceptará o eixo y no ponto de coordenadas $(0, c)$. Esta propriedade permite uma rápida identificação de um dos pontos notáveis da parábola apenas pela observação da lei de formação.

Exemplo 4. Considere a função $f(x) = 2x^2 - 5x + 7$. Como o termo independente é

$c = 7$, sabe-se, mesmo sem a construção completa do gráfico, que a parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, 7)$.

Exemplo 5. Dada a função $g(x) = -3x^2 + 4x$, nota-se que se trata de uma função incompleta onde $c = 0$. Consequentemente, o gráfico desta função obrigatoriamente passará pela origem do plano cartesiano, ou seja, pelo ponto $(0, 0)$.

A seguir, apresentam-se representações gráficas que evidenciam a intersecção da parábola com o eixo das ordenadas. No primeiro caso, a função possui $c = 2$, interceptando o eixo vertical em $(0, 2)$. No segundo caso, a função possui $c = -3$, cruzando o eixo vertical no ponto $(0, -3)$.



3 Zeros ou Raízes da Função

Os zeros, ou raízes, de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores reais de x que anulam a função, isto é, os valores para os quais $f(x) = 0$. Geometricamente, as raízes representam as abscissas dos pontos onde a parábola intercepta o eixo horizontal (eixo x).

Para determinar esses valores, deve-se resolver a equação do 2º grau associada à função, igualando sua lei de formação a zero:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

3.1 Fórmula Resolutiva

O método analítico mais amplamente utilizado para encontrar as raízes é a aplicação da fórmula resolutiva, frequentemente denominada na literatura escolar como Fórmula de Bhaskara.

Fórmula Resolutiva

As raízes de uma função quadrática são determinadas pela expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde Δ (letra grega lida como "delta") é denominado discriminante da equação, calculado por:

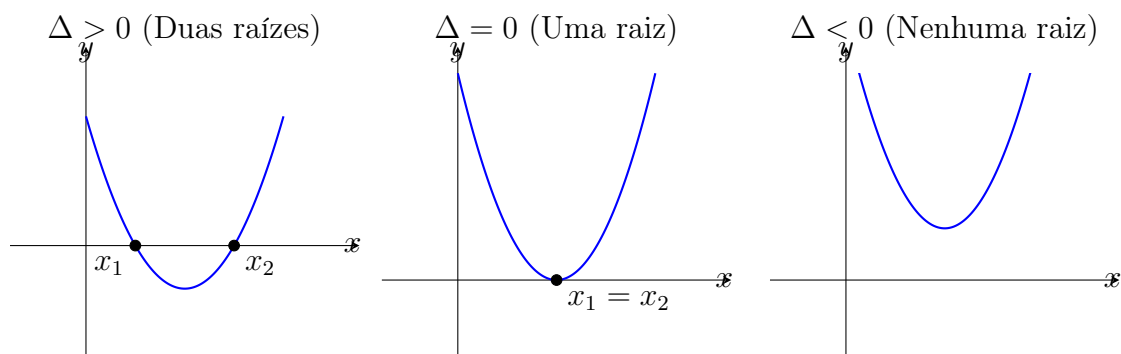
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

3.2 O Papel do Discriminante (Δ)

O valor numérico do discriminante revela propriedades fundamentais sobre a quantidade e a natureza das raízes da função. Consequentemente, ele determina de que forma o gráfico se comporta em relação ao eixo horizontal. Existem três cenários possíveis a serem analisados:

- a) $\Delta > 0$ (**Discriminante positivo**): A função possui duas raízes reais e distintas ($x_1 \neq x_2$). Geometricamente, a parábola intercepta o eixo x em dois pontos diferentes.
- b) $\Delta = 0$ (**Discriminante nulo**): A função possui duas raízes reais e iguais ($x_1 = x_2$), frequentemente tratadas como uma única raiz ou raiz dupla. Geometricamente, a parábola tangencia (toca em apenas um ponto) o eixo x .
- c) $\Delta < 0$ (**Discriminante negativo**): A função não possui raízes no conjunto dos números reais, uma vez que não existe raiz quadrada real de um número negativo. Geometricamente, a parábola não intercepta o eixo x .

A seguir, ilustra-se o comportamento gráfico para os três casos descritos acima. Nestes esboços, assume-se uma função com concavidade voltada para cima ($a > 0$). O raciocínio é análogo para funções com concavidade voltada para baixo ($a < 0$).



4 Vértice da Parábola e Eixo de Simetria

A parábola, representação gráfica da função quadrática, possui um ponto extremo denominado **vértice**. Este ponto marca a transição geométrica entre as fases de crescimento e decrescimento da função.

4.1 Demonstração Analítica (Via Simetria)

Uma propriedade geométrica fundamental da parábola é a sua simetria em relação a uma reta vertical que passa exatamente pelo seu vértice. Isso implica que quaisquer dois pontos do gráfico que possuam a mesma ordenada (mesma altura y) estarão a uma mesma distância horizontal do eixo de simetria.

Consequentemente, a abscissa do vértice (x_v) localiza-se exatamente no ponto médio entre as abscissas de dois pontos simétricos quaisquer.

Para determinar x_v , a estratégia mais simples é utilizar as raízes da função, x_1 e x_2 , que são pontos simétricos com ordenada $y = 0$. Sabe-se, pelas relações de Girard (ou pela própria fórmula resolutiva), que a soma das raízes de uma equação do 2º grau é dada por:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Como x_v é o ponto médio entre as raízes, sua coordenada é a média aritmética entre x_1 e x_2 :

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Substituindo a soma das raízes na expressão do ponto médio, obtém-se:

$$x_v = \frac{-\frac{b}{a}}{2} \implies x_v = -\frac{b}{2a}$$

Nota: Este raciocínio permanece válido mesmo quando a função não possui raízes reais, pois a mesma lógica de ponto médio aplica-se às raízes complexas ou a quaisquer outros dois pontos reais com mesma ordenada, como $(0, c)$ e $(-\frac{b}{a}, c)$.

Determinação da Ordenada (y_v)

Uma vez conhecida a abscissa do vértice, a ordenada correspondente (y_v) é simplesmente o valor numérico da função quando $x = x_v$. Ou seja, calcula-se $f(x_v)$:

$$y_v = a \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a} \right) + c$$

Desenvolvendo as potências e os produtos:

$$y_v = a \left(\frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{2a} + c$$

Simplificando o termo a na primeira fração:

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

Para somar as frações, reduz-se todos os termos ao mesmo denominador ($4a$):

$$y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$
$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Colocando o sinal negativo em evidência no numerador e lembrando que o discriminante é $\Delta = b^2 - 4ac$, chega-se à fórmula final:

$$y_v = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} \implies y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Coordenadas do Vértice

O vértice V de uma parábola descrita por $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui coordenadas $V = (x_v, y_v)$, que podem ser determinadas pelas seguintes expressões:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

4.2 Ponto de Máximo e Ponto de Mínimo

A natureza do vértice — isto é, se ele representa o valor máximo ou o valor mínimo assumido pela função — está diretamente vinculada à concavidade da parábola e, consequentemente, ao sinal do coeficiente a :

- **Mínimo Global** ($a > 0$): Quando a concavidade está voltada para cima, o vértice é o ponto mais baixo do gráfico. Nesse caso, a ordenada y_v representa o **valor mínimo** alcançado pela função.
- **Máximo Global** ($a < 0$): Quando a concavidade está voltada para baixo, o vértice é o ponto mais alto do gráfico. Assim, a ordenada y_v representa o **valor máximo** atingido pela função.

4.3 Eixo de Simetria

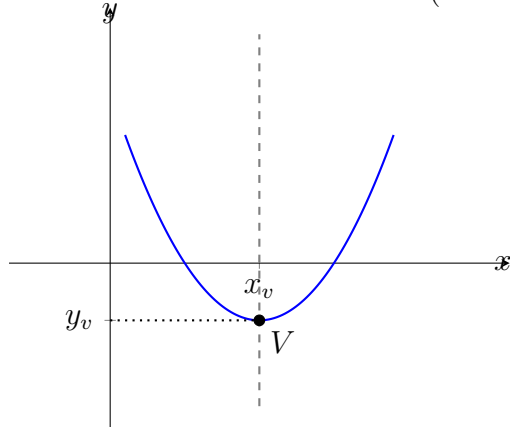
Toda parábola é uma figura simétrica. A reta vertical que divide a curva em duas metades idênticas é chamada de eixo de simetria. Esse eixo passa exatamente pelo vértice da parábola, o que significa que sua equação é dada por:

$$x = x_v$$

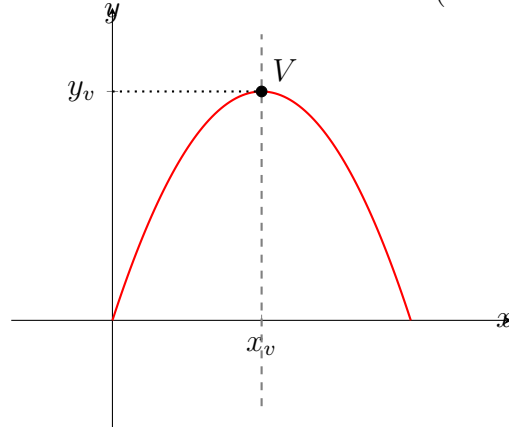
Dessa forma, quaisquer dois pontos do gráfico que possuam a mesma ordenada (y) estarão localizados a uma mesma distância horizontal em relação ao eixo de simetria.

Abaixo, apresentam-se as ilustrações geométricas do vértice atuando como ponto de mínimo e de máximo, juntamente com a representação do eixo de simetria (em linha tracejada).

Vértice como Ponto de Mínimo ($a > 0$)



Vértice como Ponto de Máximo ($a < 0$)



5 Construção Gráfica (Passo a Passo)

A construção do gráfico de uma função quadrática a partir de uma tabela aleatória de valores para x e y costuma ser ineficiente e, muitas vezes, não revela as principais ca-

racterísticas da curva. Para um esboço preciso e rápido, a estratégia mais recomendada consiste em determinar os chamados pontos notáveis da parábola.

O roteiro a seguir sistematiza esse processo analítico:

- 1. Análise da concavidade:** Verificar o sinal do coeficiente a . Se $a > 0$, a concavidade é voltada para cima; se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo.
- 2. Intercepto no eixo y :** Marcar no plano cartesiano o ponto $(0, c)$, onde a curva intercepta o eixo vertical.
- 3. Interceptos no eixo x (Raízes):** Calcular o discriminante (Δ) e, caso $\Delta \geq 0$, aplicar a fórmula resolutive para encontrar as raízes. Marcar os pontos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ no eixo horizontal.
- 4. Vértice e Eixo de Simetria:** Calcular as coordenadas (x_v, y_v) utilizando as fórmulas $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. Marcar este ponto, que será o extremo da parábola. Opcionalmente, traçar a reta tracejada $x = x_v$ (eixo de simetria) para auxiliar no traçado.
- 5. Traçado da curva:** Unir os pontos marcados com uma curva contínua e suave (sem formar bicos no vértice), respeitando a simetria em relação ao eixo central.

Exemplo de Aplicação

Exemplo 6. Construir o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Resolução passo a passo:

- 1. Concavidade:** Como $a = 1$ (sendo $1 > 0$), a parábola possui concavidade voltada para cima.
- 2. Intercepto no eixo y :** Como $c = 3$, o gráfico intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 3)$.
- 3. Raízes (Interceptos no eixo x):** Calcula-se inicialmente o discriminante:

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$$

Sendo $\Delta > 0$, há duas raízes reais e distintas:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2(1)} \implies x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

Dessa forma, obtêm-se as raízes $x_1 = 3$ e $x_2 = 1$. Os pontos no eixo horizontal são $(1, 0)$ e $(3, 0)$.

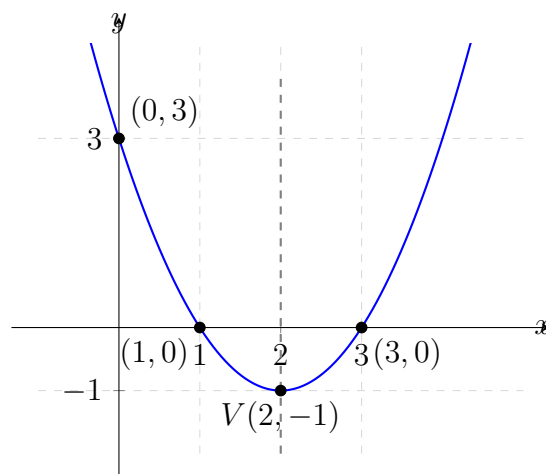
4. Vértice: As coordenadas do vértice são dadas por:

$$x_v = -\frac{(-4)}{2(1)} = 2$$

$$y_v = -\frac{4}{4(1)} = -1$$

O vértice localiza-se no ponto $V = (2, -1)$, que representa o valor mínimo da função.

5. Esboço do Gráfico: Reunindo os pontos $(0, 3)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$ e $(2, -1)$, traça-se a parábola:



6 Estudo do Sinal da Função Quadrática

Estudar o sinal de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ consiste em determinar para quais valores do domínio (eixo x) a função assume valores positivos ($f(x) > 0$), valores negativos ($f(x) < 0$) ou se anula ($f(x) = 0$).

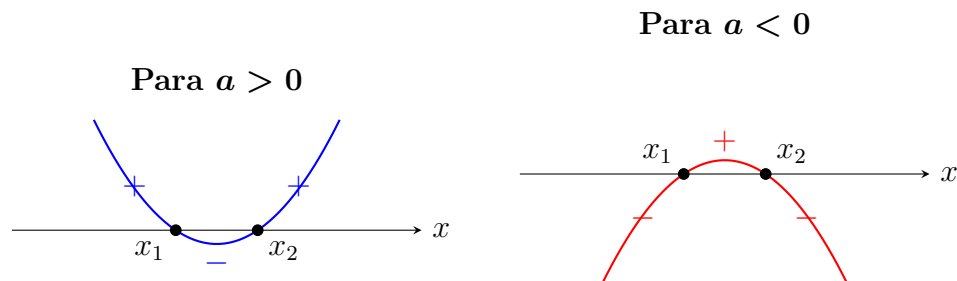
Geometricamente, isso equivale a identificar quais partes da parábola estão acima do eixo das abscissas, quais estão abaixo e onde ocorrem as intersecções com este eixo. Esse estudo depende exclusivamente de dois fatores:

- A quantidade de raízes reais, determinada pelo discriminante (Δ).
- A concavidade da parábola, determinada pelo sinal do coeficiente a .

Apresentam-se a seguir os três cenários possíveis em relação ao Δ , subdivididos pela concavidade.

Caso 1: $\Delta > 0$ (Duas raízes reais e distintas)

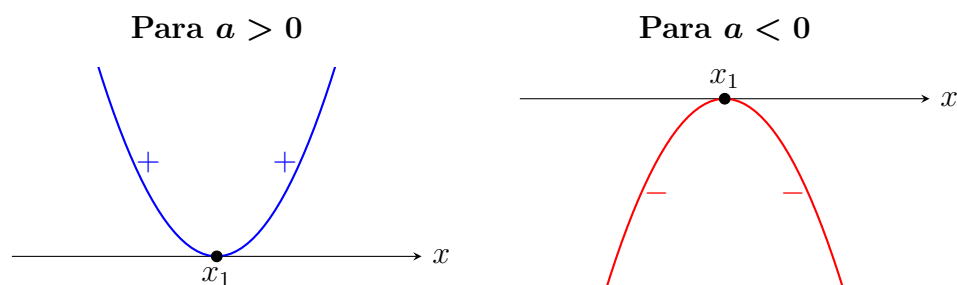
Neste caso, a função possui duas raízes, x_1 e x_2 . Supondo $x_1 < x_2$, a parábola cruza o eixo horizontal em dois pontos, dividindo-o em três intervalos.



- **Mesmo sinal de a :** Para valores exteriores às raízes ($x < x_1$ ou $x > x_2$).
- **Sinal contrário a a :** Para valores entre as raízes ($x_1 < x < x_2$).

Caso 2: $\Delta = 0$ (Uma raiz real dupla)

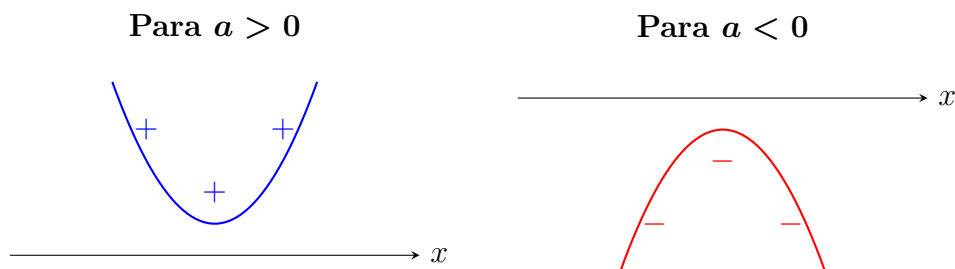
A função possui uma única raiz x_1 , que coincide com a abscissa do vértice. A parábola apenas tangencia o eixo horizontal, sem atravessá-lo. Portanto, a função nunca assume sinal contrário ao de a .



- $f(x) = 0$ para $x = x_1$.
- A função acompanha o **mesmo sinal de a** para qualquer $x \neq x_1$.

Caso 3: $\Delta < 0$ (Nenhuma raiz real)

Neste cenário, a parábola não intercepta o eixo das abscissas. O gráfico encontra-se inteiramente acima do eixo x (se $a > 0$) ou inteiramente abaixo dele (se $a < 0$).



- A função nunca se anula.
- A função possui o **mesmo sinal de a** para todo $x \in \mathbb{R}$.

7 Aplicações e Otimização

A função quadrática é uma ferramenta matemática poderosa para a modelagem de diversas situações práticas. Em muitas áreas do conhecimento, como na Física, na Economia e na Engenharia, as relações entre grandezas comportam-se de maneira não linear, ajustando-se perfeitamente ao modelo parabólico.

Entre as aplicações mais recorrentes destacam-se:

- **Física e Balística:** A trajetória de projéteis e o movimento de corpos em queda livre sob a ação da gravidade descrevem arcos de parábola.
- **Otimização:** Problemas que exigem a determinação do maior ou menor valor possível para uma grandeza, como a maximização de lucros, a minimização de custos ou o cálculo da maior área possível de um terreno sob certas restrições.

7.1 Problemas de Máximos e Mínimos

Na resolução de problemas de otimização utilizando a função quadrática, o objetivo central é sempre a análise do vértice da parábola. No entanto, a correta interpretação do problema é fundamental para decidir qual das coordenadas do vértice (x_v ou y_v) responde à pergunta formulada.

De modo geral, em uma função $f(x)$ que modela uma situação prática:

- **A abscissa x_v :** Representa *quando* ou *onde* ocorre o valor extremo. É a quantidade, o tempo, o preço ou a dimensão necessária para que a situação atinja seu limite máximo ou mínimo.
- **A ordenada y_v :** Representa o *valor extremo em si*. É o lucro máximo obtido, a altura máxima atingida, o custo mínimo gasto ou a área máxima calculada.

7.2 Exemplo de Aplicação

O exemplo a seguir ilustra a construção do modelo quadrático e a utilização do vértice para resolver um problema geométrico de otimização.

Exemplo 7. Deseja-se cercar um terreno retangular utilizando exatamente 40 metros de tela de arame. Determine as dimensões desse terreno para que a sua área seja a maior possível e calcule essa área máxima.

Resolução passo a passo:

1. Modelagem Matemática: Sejam x e y as dimensões (largura e comprimento) do terreno retangular. Sabe-se que o perímetro (soma de todos os lados) é delimitado pela quantidade de tela disponível:

$$2x + 2y = 40$$

Dividindo toda a equação por 2, obtém-se o semiperímetro:

$$x + y = 20 \implies y = 20 - x$$

A área A do retângulo é dada pelo produto de suas dimensões:

$$A = x \cdot y$$

Substituindo y pela expressão encontrada, constrói-se a função área dependendo apenas da variável x :

$$A(x) = x(20 - x) \implies A(x) = -x^2 + 20x$$

2. Análise da Função: A função $A(x) = -x^2 + 20x$ é uma função quadrática com $a = -1$, $b = 20$ e $c = 0$. Como o coeficiente a é negativo ($a < 0$), a parábola possui concavidade voltada para baixo, confirmando a existência de um ponto de área máxima.

3. Cálculo das Dimensões (O valor de x_v): A dimensão x que proporciona a maior área corresponde à abscissa do vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-1)} = \frac{-20}{-2} = 10 \text{ metros}$$

Como $y = 20 - x$, tem-se que $y = 20 - 10 = 10$ metros. Portanto, para que a área seja máxima, o terreno deve ter dimensões de 10 m por 10 m (configurando-se como um quadrado).

4. Cálculo da Área Máxima (O valor de y_v): A área máxima pode ser encontrada de duas maneiras. A primeira é calculando a área diretamente com as dimensões encontradas: $10 \times 10 = 100 \text{ m}^2$. A segunda, puramente algébrica, é calculando a ordenada do vértice:

$$\Delta = (20)^2 - 4(-1)(0) = 400$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{400}{4(-1)} = \frac{-400}{-4} = 100 \text{ m}^2$$

Conclui-se que as dimensões devem ser 10 m e 10 m, garantindo uma área máxima de 100 m².

8 Exercícios

Exercício 1. Dada a função quadrática $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$, determine:

- a) Os coeficientes a , b e c .
- b) A direção da concavidade da respectiva parábola.
- c) As coordenadas do ponto exato de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas.

Exercício 2. Determine, caso existam, os zeros (raízes reais) das seguintes funções quadráticas:

- a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$
- b) $g(x) = -x^2 + 4x - 4$
- c) $h(x) = 3x^2 + 2x + 5$

Exercício 3. Determine as coordenadas do vértice da parábola descrita pela função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ e classifique este ponto como ponto de máximo ou ponto de mínimo da função.

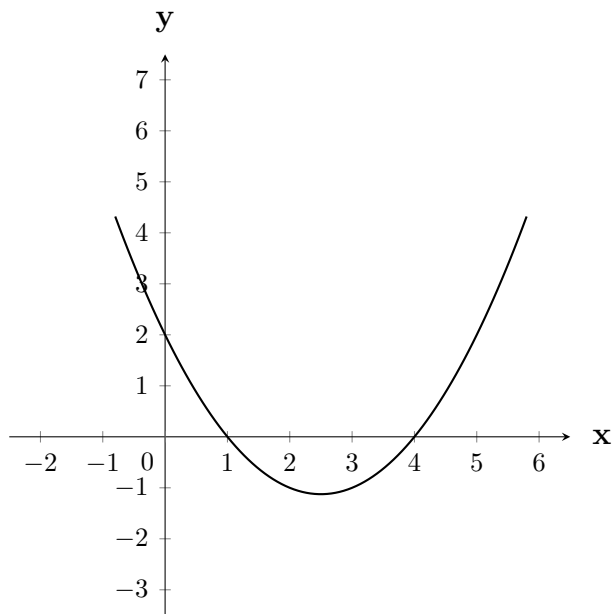
Exercício 4. Um projétil é lançado do solo para cima, e sua altura h , em metros, em função do tempo t , em segundos, é descrita pela função $h(t) = -5t^2 + 20t$. Com base nesse modelo matemático, determine:

- a) O tempo necessário para que o projétil atinja a sua altura máxima.
- b) A altura máxima atingida pelo projétil.

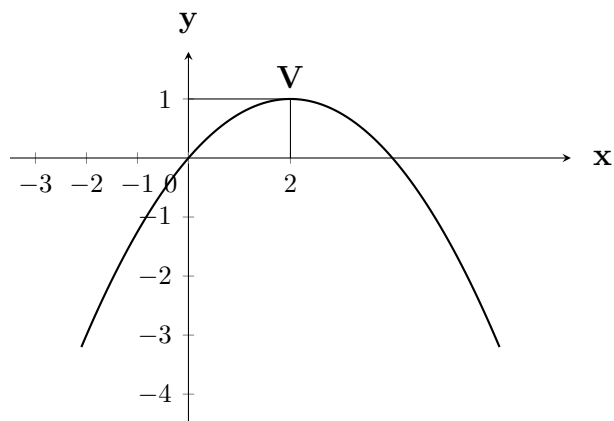
Exercício 5. Quais os pontos de encontro do gráfico da função $f(x) = x^2 + 6x + 8$, definida nos números reais, com o eixo x do plano cartesiano?

Exercício 6. A função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 7x + 10$ tem raízes reais. A soma dessas raízes é igual a

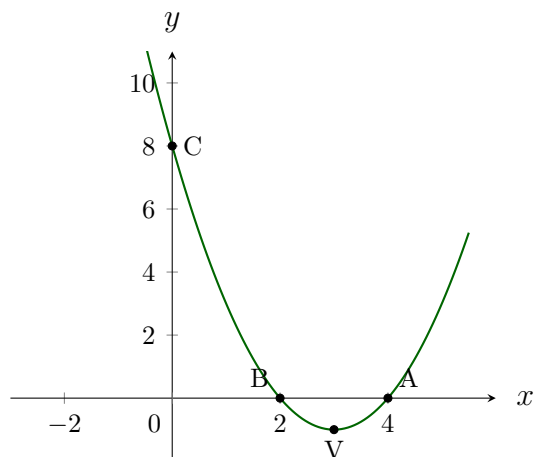
Exercício 7. Qual é a lei de formação da função a seguir:



Exercício 8. Qual é a lei de formação da função a seguir e quais são suas raízes:



Exercício 9. Qual é a lei de formação da função a seguir:



Exercício 10. (UNESP - 2017) Uma função quadrática f é dada por $f(x) = x^2 + bx + c$, com b e c reais. Se $f(1) = -1$ e $f(2) - f(3) = 1$, o menor valor que $f(x)$ pode assumir, quando x varia no conjunto dos números reais, é igual a

Exercício 11. O lucro mensal $L(x)$, em milhares de reais, de uma empresa depende do preço x , em reais, do produto que pode ser descrito pela função $L(x) = -2x^2 + 16x - 20$. Qual deve ser o preço do produto para se obter o maior lucro possível e qual é esse lucro?

Exercício 12. O lançamento de um foguete pode ter sua altura descrita pela função $h(x)$, em metros, em que x é o tempo em segundos. A função que descreve a trajetória desse lançamento é: $h(x) = -5x^2 + 30x + 10$. Qual é a altura máxima atingida pelo foguete?

Exercício 13. Um drone faz uma trajetória que pode ser descrita pela função $f(x) = -2x^2 + 8x$, em que x é o tempo dado em segundos e $f(x)$ é a altura do drone dada em metros. Sabendo que ele toca novamente o solo ao final do trajeto, em qual instante isso ocorre?

Exercício 14. A função quadrática $f(x) = 3x^2 - 6x + k$ não tem raízes reais. Qual o menor valor inteiro para k ?

Exercício 15. Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia. A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou em qual dia?

Exercício 16. (FGV 2017) Um fazendeiro dispõe de material para construir 60 metros de cerca em uma região retangular, com um lado adjacente a um rio. Sabendo que ele não pretende colocar cerca no lado do retângulo adjacente ao rio, a área máxima da superfície que conseguirá cercar é

Resoluções

