



Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

Material de Apoio e Lista de Exercícios

Noções de Funções

Professor: Danilo Kanno

Guaratinguetá

1 Definição de Função

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma função f de A em B é uma regra que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$.

A notação matemática para representar uma função é $f : A \rightarrow B$, lida como “ f é uma função de A em B ”. O elemento y , associado ao elemento x pela função f , é denotado por $f(x)$ e chamado de imagem de x pela função f .

1.1 Domínio, Contradomínio e Imagem

Para uma função $f : A \rightarrow B$, definem-se os seguintes conjuntos:

- **Domínio (D):** É o conjunto de partida A . Contém todos os valores de x que serão transformados pela função.
- **Contradomínio (CD):** É o conjunto de chegada B . Contém todos os valores possíveis para os quais a função pode apontar.
- **Conjunto Imagem (Im):** É o subconjunto de B formado estritamente pelos elementos que são resultados da função, ou seja, que recebem correspondência (flechas) de algum elemento de A . Nota-se que $Im(f) \subset B$.

Para consolidar a distinção entre esses conjuntos, analisam-se os exemplos a seguir.

Exemplo 1. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Define-se a função $f : A \rightarrow B$ pela lei de formação $f(x) = 2x$ (o dobro do valor de x).

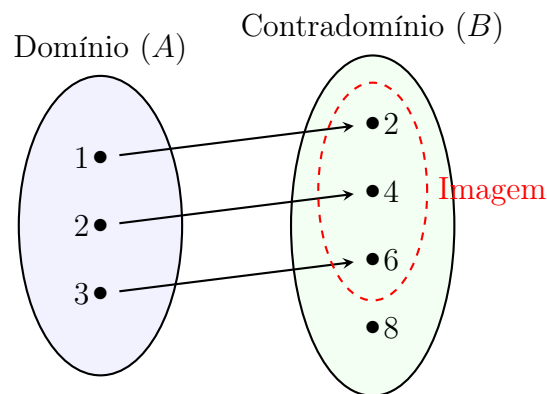
Calculando as imagens para cada elemento do domínio A :

- Para $x = 1$, tem-se $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$.
- Para $x = 2$, tem-se $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$.
- Para $x = 3$, tem-se $f(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Neste caso, estruturam-se os conjuntos da seguinte maneira:

- **Domínio (D):** $A = \{1, 2, 3\}$.
- **Contradomínio (CD):** $B = \{2, 4, 6, 8\}$.
- **Imagem (Im):** $\{2, 4, 6\}$.

Observa-se que o elemento 8 pertence ao contradomínio, mas não faz parte do conjunto imagem, pois não há elemento no conjunto A cujo dobro seja igual a 8. Visualmente, tem-se a seguinte representação:



Exemplo 2. Considere os conjuntos $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Define-se a função $g : C \rightarrow D$ dada pela lei $g(x) = x^2$ (o quadrado do valor de x).

Calculando as correspondências:

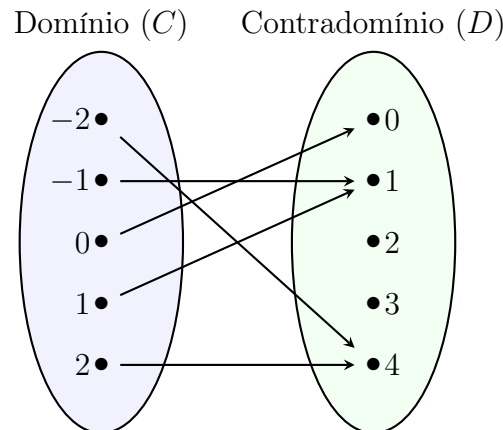
- $g(-2) = (-2)^2 = 4$
- $g(-1) = (-1)^2 = 1$
- $g(0) = 0^2 = 0$
- $g(1) = 1^2 = 1$
- $g(2) = 2^2 = 4$

Analisando os conjuntos:

- **Domínio:** $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- **Contradomínio:** $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

- **Imagem:** $\{0, 1, 4\}$.

Neste exemplo, nota-se uma característica importante: elementos distintos do domínio (como -2 e 2) podem possuir a mesma imagem (4). Além disso, os elementos 2 e 3 do contradomínio não recebem flechas, logo, não pertencem à imagem.



1.2 Relações que não são funções

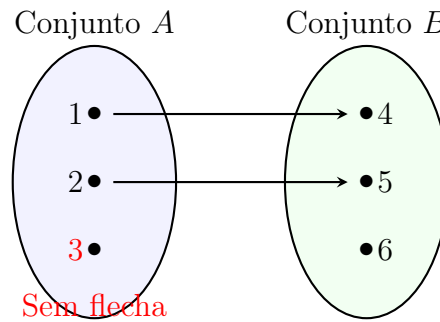
Conforme a definição inicial, para que uma relação de um conjunto A em um conjunto B seja rigorosamente classificada como uma função, duas condições estruturais devem ser satisfeitas simultaneamente:

- Todos os elementos do domínio (A) devem possuir uma correspondência no contradomínio (B). Não pode haver elemento em A sem flecha.
- Cada elemento do domínio (A) deve estar associado a um **único** elemento no contradomínio (B). Um elemento de A não pode partir para dois ou mais destinos.

Abaixo, apresentam-se casos em que essas regras são violadas, descaracterizando a relação como uma função.

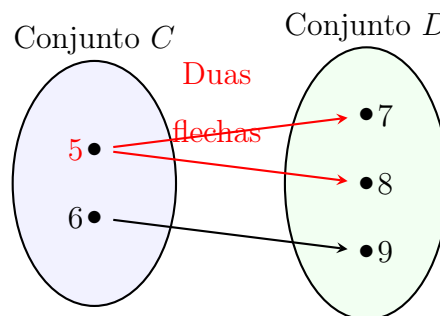
Exemplo 3. Considere a relação entre os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$. Suponha que o elemento 1 se associe ao 4 e o elemento 2 se associe ao 5 .

Neste cenário, o elemento 3 , pertencente ao conjunto A , não possui imagem no conjunto B . Como existe um elemento no conjunto de partida sem correspondência, essa relação **não é uma função**.



Exemplo 4. Considere a relação entre os conjuntos $C = \{5, 6\}$ e $D = \{7, 8, 9\}$. Suponha que o elemento 5 se associe tanto ao 7 quanto ao 8, e o elemento 6 se associe ao 9.

Neste caso, o elemento 5 (do conjunto de partida) está associado a dois valores distintos no conjunto de chegada. A definição de função exige que cada elemento de x tenha um **único** resultado y . Portanto, essa relação também **não é uma função**.



2 Classificação das Funções

As funções podem ser classificadas de acordo com o comportamento de seus conjuntos Contradomínio e Imagem, bem como a forma como os elementos do Domínio se associam.

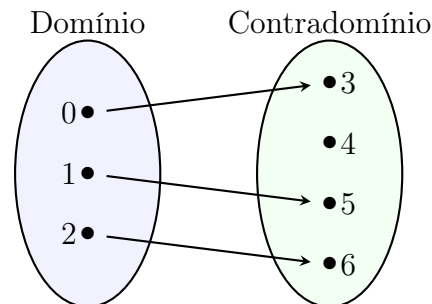
2.1 Função Injetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita **injetora** (ou injetiva) se elementos distintos do domínio A possuem imagens distintas no contradomínio B . Formalmente:

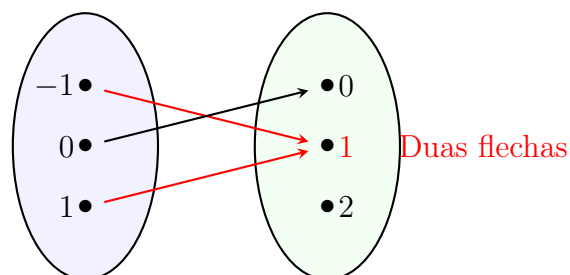
$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Visualmente, isso significa que nenhum elemento do conjunto de chegada recebe mais de uma flecha. Cada elemento do contradomínio é atingido, no máximo, uma vez.

Exemplo 5. Exemplo de Função Injetora: Seja a função $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{3, 4, 5, 6\}$ definida pelas correspondências $f(0) = 3$, $f(1) = 5$ e $f(2) = 6$. Como cada elemento do domínio possui um destino exclusivo no contradomínio, a função é injetora. O fato de o elemento 4 não receber flecha não invalida a injetividade.



Exemplo 6. Exemplo de Função NÃO Injetora: Considere a função $g : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ em que a lei de formação é $g(x) = x^2$. Tem-se $g(-1) = 1$, $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$. Nota-se que os elementos distintos -1 e 1 do domínio possuem a mesma imagem (1). Como o elemento 1 do contradomínio recebe duas flechas, a função **não é injetora**.



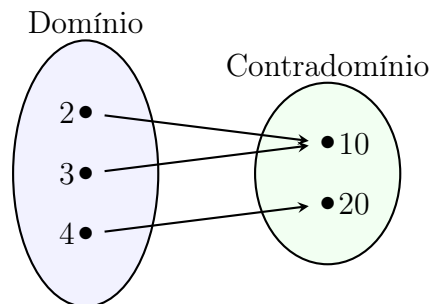
2.2 Função Sobrejetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita **sobrejetora** (ou sobrejetiva) se todos os elementos do contradomínio B são imagem de pelo menos um elemento do domínio A . Isso significa que o conjunto Imagem é exatamente igual ao Contradomínio:

$$Im(f) = B$$

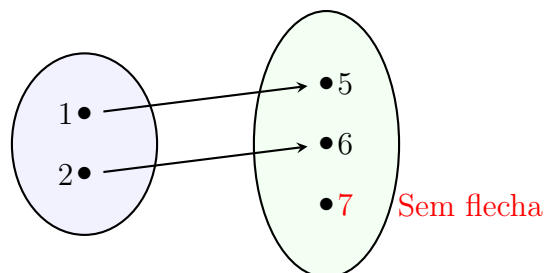
Visualmente, não sobra nenhum elemento no conjunto de chegada sem receber correspondência. Todo elemento de B recebe pelo menos uma flecha.

Exemplo 7. Exemplo de Função Sobrejetora: Considere a função $h : \{2, 3, 4\} \rightarrow \{10, 20\}$ definida por $h(2) = 10$, $h(3) = 10$ e $h(4) = 20$. Todos os elementos do contradomínio ($\{10, 20\}$) foram atingidos por pelo menos uma flecha. Portanto, a Imagem é igual ao Contradomínio e a função é sobrejetora (mesmo não sendo injetora).



Exemplo 8. Exemplo de Função NÃO Sobrejetora: Seja a função $p : \{1, 2\} \rightarrow \{5, 6, 7\}$ definida por $p(1) = 5$ e $p(2) = 6$.

Observa-se que o elemento 7 pertence ao contradomínio, mas não recebe flecha de nenhum elemento do domínio. Como a Imagem ($\{5, 6\}$) é diferente do Contradomínio ($\{5, 6, 7\}$), a função **não é sobrejetora**.



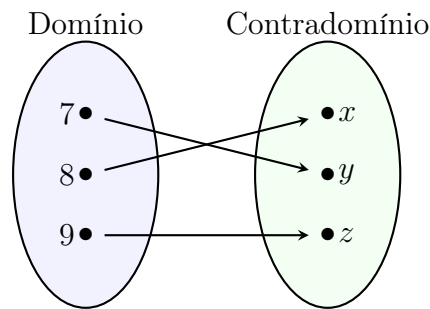
2.3 Função Bijetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita **bijetora** (ou bijetiva) se, e somente se, for **simultaneamente** injetora e sobrejetora.

Isso significa que cada elemento do domínio se liga a um elemento exclusivo do contradomínio (injetora) e não sobra nenhum elemento no contradomínio sem receber flecha

(sobrejetora). Para que ocorra uma bijeção entre dois conjuntos, é estritamente necessário que ambos possuam a mesma quantidade de elementos.

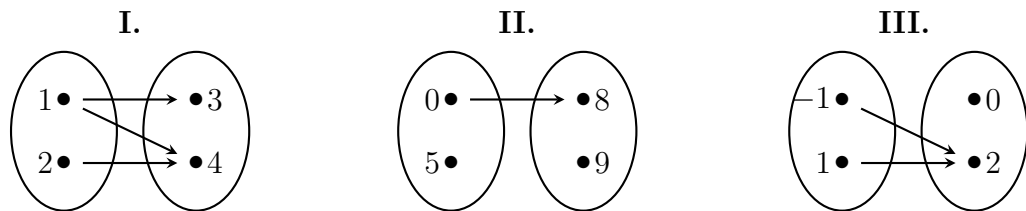
Exemplo 9. Exemplo de Função Bijetora: Considere a função $q : \{7, 8, 9\} \rightarrow \{x, y, z\}$ definida por $q(7) = y$, $q(8) = x$ e $q(9) = z$. Todos os elementos do contradomínio recebem exatamente uma única flecha. A função satisfaz as duas condições simultaneamente.



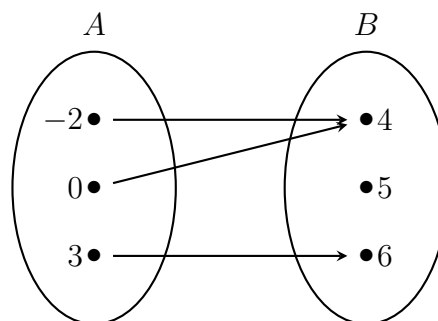
Exemplo 10. Exemplo de Função NÃO Bijetora: Qualquer função que falhe em ser injetora ou que falhe em ser sobrejetora (como demonstrado nos contraexemplos anteriores) é classificada como não bijetora. Se faltar exclusividade nas correspondências ou sobrarem elementos no conjunto de chegada, a bijeção é descaracterizada.

3 Exercícios

Exercício 1. Analise os diagramas de flechas a seguir, que representam relações matemáticas do conjunto de partida no conjunto de chegada. Determine quais dessas relações são, de fato, funções. Para as que não forem, apresente a justificativa com base na definição formal.



Exercício 2. Considere a função $f : A \rightarrow B$ representada no diagrama de flechas abaixo.



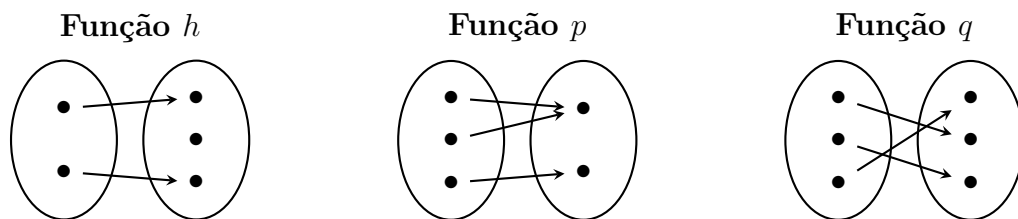
Com base na representação, escreva os conjuntos correspondentes a:

- Domínio de f (denotado por D).
- Contradomínio de f (denotado por CD).
- Imagem de f (denotada por Im).

Exercício 3. Sejam os conjuntos $M = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $N = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$. Define-se a função $g : M \rightarrow N$ pela lei de formação $g(x) = 2x + 1$. Realize o que se pede:

- Calcule o valor numérico da imagem para cada elemento do domínio M .
- Determine o conjunto Imagem da função g .
- A função g pode ser classificada como sobrejetora? Justifique sua resposta.

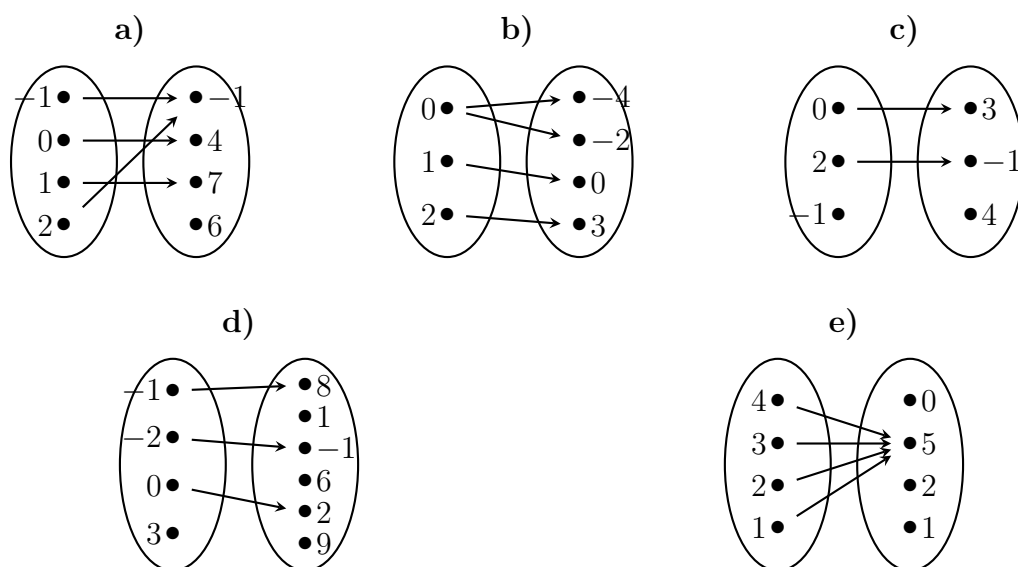
Exercício 4. Classifique as funções representadas nos diagramas a seguir escolhendo **apenas uma** das alternativas para cada caso: Injetora (não sobrejetora), Sobrejetora (não injetora), Bijetora, ou Nenhuma das anteriores.



Exercício 5. Em cada um dos casos a seguir, determine se a relação descrita constitui uma função. Apresente a justificativa para cada classificação.

- A cada aluno de uma sala de aula associa-se a sua respectiva altura.
- A cada número natural associa-se o seu quadrado.
- A cada pessoa associa-se o número do calçado que ela utiliza.
- A cada mês do ano associa-se a sua quantidade de dias.
- A cada número real associam-se as suas duas raízes quadradas.

Exercício 6. Analise as relações representadas nos diagramas de flechas a seguir. Determine, em cada situação, se a representação configura uma função. Para os casos em que a relação não for uma função, apresente a devida justificativa matemática.



Exercício 7. Considere uma função f que associa a cada número x o seu respectivo dobro. Realize o que se pede:

- Escreva os pares ordenados gerados por essa função para $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- b) Represente graficamente essa relação em um plano cartesiano.

Exercício 8. Dada a função definida pela lei de formação $f(x) = x + 3$, determine:

- a) Os valores numéricos de $f(0)$, $f(2)$ e $f(5)$.
- b) O valor numérico de x necessário para que a igualdade $f(x) = 10$ seja verdadeira.
- c) Uma tabela de correspondência de valores relacionando x e $f(x)$ para $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Exercício 9. Em determinado dia, três mães deram à luz em uma maternidade. Uma delas teve trigêmeos, outra teve gêmeos e a terceira teve um único filho. Considerando o conjunto das mães, o conjunto das crianças e as relações descritas a seguir, identifique qual(is) delas representa(m) uma função.

- a) A relação que associa cada mãe ao seu respectivo filho.
- b) A relação que associa cada criança à sua respectiva mãe.
- c) A relação que associa cada criança ao seu irmão.

Exercício 10. Em uma biblioteca, todos os livros são catalogados pelo título, além de outros identificadores, havendo títulos com mais de um exemplar disponível. Considere uma função f cujo domínio é o conjunto de todos os livros catalogados e o contradomínio é o conjunto dos títulos dos livros catalogados dessa biblioteca. Verifique se a função f é injetora, justificando a resposta com base na definição.

Exercício 11. Uma professora distribui uma pesquisa, listando no quadro três opções de paisagens: praia, fazenda e floresta. Em seguida, solicita que cada um dos 30 alunos escolha a sua paisagem preferida. Sendo A o conjunto formado pelos alunos e B o conjunto formado pelas três paisagens, determine, para cada situação descrita a seguir, se a relação $f : A \rightarrow B$ é uma função. Em caso afirmativo, classifique-a em injetora, sobrejetora ou bijetora.

- a) Todos os alunos escolheram a opção praia.
- b) Dez alunos escolheram praia, dez alunos escolheram fazenda e dez alunos escolheram floresta.

- c) Todos os alunos escolheram sua paisagem preferida, com exceção de um aluno específico, que afirmou não gostar de nenhuma das opções.
- d) Todos os alunos escolheram sua paisagem preferida, com exceção de um aluno específico, que afirmou gostar das três opções de maneira igual.

Exercício 12. Uma fábrica de canetas possui um custo diário de produção fixo de R\$ 120,00, acrescido de R\$ 0,40 por unidade produzida. Sabe-se que cada caneta é comercializada por R\$ 1,20. Determine o que se pede:

- a) A lei de formação que associa a quantidade x de canetas ao custo diário de produção $C(x)$ dessas x canetas.
- b) O custo diário de produção referente a 80 canetas.
- c) A lei de formação que associa a quantidade x de canetas vendidas ao lucro diário $L(x)$.
- d) O lucro obtido pela empresa com a venda de 200 canetas.

Exercício 13. Construa o gráfico das seguintes funções no plano cartesiano e classifique cada uma delas em injetora, sobrejetora ou bijetora:

- a) $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$
- b) $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 4, 9, 16\}$, definida por $f(x) = x^2$
- c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$

Resoluções

