Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

Material de Apoio e Lista de Exercícios

Números Racionais

Professor: **Danilo Kanno**

Guaratinguetá

1 Introdução aos Números Racionais

O conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$) permite a contagem e a representação de quantidades negativas. No entanto, ele mostra-se insuficiente para expressar partes de um todo, medidas quebradas ou o resultado de divisões não exatas.

A necessidade de representar essas quantidades deu origem às **frações** e ao conjunto dos **Números Racionais** ($\mathbb{Q}$). Esse conjunto expande as possibilidades de cálculo, permitindo a representação de valores intermediários, como a medida de meio metro ou a divisão de uma conta entre três pessoas.

Curiosidade: Origem do Nome

O símbolo $\mathbb{Q}$ deriva da palavra Quociente (do latim quotiens, termo presente também em idiomas como o inglês, alemão e italiano) que representa o resultado da divisão.
Já o termo "Racional"deriva do latim *ratio*, que significa **razão**. Na matemática, uma razão é uma comparação entre dois números através da divisão.

1.1 Definição

Um número é considerado racional quando pode ser escrito na forma de uma fração, ou seja, como a razão entre dois números inteiros. O denominador (a parte de baixo da fração) indica em quantas partes o todo foi dividido e não pode ser zero.

Matematicamente, o conjunto é definido como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Isso significa que qualquer número da forma $\frac{a}{b}$ pertence a $\mathbb{Q}$, como vemos nos casos abaixo:

- Se $a = 1$ e $b = 2$, temos o racional $\frac{1}{2}$ (meio).
- Se $a = -3$ e $b = 4$, temos o racional $-\frac{3}{4}$.
- Se $a = 5$ e $b = 1$, temos $\frac{5}{1}$, que é simplesmente o número inteiro 5 que também é racional.

É fundamental notar que o denominador b deve ser diferente de zero, pois a divisão por zero não é definida na matemática.

1.2 Subconjuntos e Representações

O conjunto $\mathbb{Q}$ é abrangente e contém números que, à primeira vista, podem não parecer frações.

Exemplo 1. Diferentes faces de um número racional Todos os números abaixo são racionais, pois podem ser transformados na forma $\frac{a}{b}$:

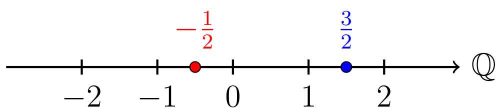
a) **Frações usuais:** $\frac{2}{3}, \frac{7}{2}, -\frac{1}{5}$.
b) **Decimais Exatos:** O número $1,5$ é racional pois equivale a $\frac{3}{2}$.
c) **Números Inteiros:** O número -4 é racional pois pode ser escrito como $\frac{-4}{1}$. Logo, todo número inteiro também é racional ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).
d) **Dízimas Periódicas:** O número $0,333...$ é racional pois equivale à fração $\frac{1}{3}$.

2 Representação na Reta Numérica

Uma das formas mais eficazes de compreender a natureza dos números racionais é através de sua representação geométrica. A reta numérica, anteriormente preenchida apenas pelos números inteiros, passa agora a abrigar os números racionais nos intervalos entre os inteiros.

Para localizar um número racional $\frac{a}{b}$ na reta, divide-se a unidade (o espaço entre 0 e 1, ou entre 1 e 2, etc.) em b partes iguais. A partir da origem (zero), deslocam-se a dessas partes: para a direita, caso o número seja positivo, ou para a esquerda, caso seja negativo.

Exemplo 2. Localização de pontos Considere-se a representação dos números $\frac{3}{2}$ (ou $1,5$) e $-\frac{1}{2}$ na reta numérica.



Nota-se que o número $\frac{3}{2}$ encontra-se exatamente no ponto médio entre 1 e 2. Analogamente, $-\frac{1}{2}$ localiza-se entre 0 e -1.

2.1 Densidade dos Racionais

Uma propriedade fundamental do conjunto $\mathbb{Q}$ é a sua densidade. Diferentemente dos números inteiros, onde cada número possui um sucessor imediato (não há inteiro entre 1 e 2), nos racionais sempre é possível encontrar um novo número entre dois racionais quaisquer.

Propriedade da Densidade

Dados dois números racionais distintos r e s, sempre existe um número racional entre eles. Uma forma simples de encontrar um desses números é calcular a média aritmética:

$$m = \frac{r+s}{2}$$

3 Formas de Representação

Um mesmo número racional pode ser expresso de duas maneiras distintas, porém equivalentes: a forma **fracionária** e a forma **decimal**. A habilidade de transitar entre essas representações é essencial para a resolução de problemas.

3.1 Conversão: Fração para Decimal

Para converter uma fração $\frac{a}{b}$ em sua forma decimal, realiza-se a divisão do numerador a pelo denominador b.

Exemplo 3. Cálculo da representação decimal

- $\frac{3}{4} \to 3 \div 4 = 0,75$ (Decimal exato).
- $\frac{1}{3} \to 1 \div 3 = 0,333...$ (Dízima periódica).

3.2 Conversão: Decimal para Fração

Para converter um decimal exato em fração, escreve-se o número sem a vírgula no numerador. No denominador, insere-se o número 1 seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais.

Exemplo 4. Do decimal para a fração

- $0,7 = \frac{7}{10}$ (uma casa decimal $\rightarrow$ um zero).
- $2,45 = \frac{245}{100}$ (duas casas decimais $\rightarrow$ dois zeros).

4 Frações Equivalentes e Simplificação

Duas ou mais frações são ditas **equivalentes** quando representam a mesma quantidade, ou seja, ocupam o mesmo ponto na reta numérica, apesar de possuírem numeradores e denominadores distintos.

Propriedade Fundamental das Frações

O valor de uma fração não se altera quando multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador por um mesmo número diferente de zero.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k} \quad (k \neq 0)$$

Exemplo 5. Gerando classes de equivalência: Para obter frações equivalentes a partir de uma fração dada, multiplica-se o numerador e o denominador pelo mesmo número natural não nulo. Isso cria uma "família"de frações que representam a mesma quantidade.

Considere-se a fração $\frac{3}{4}$. Multiplicando-se seus termos sucessivamente por 2, 3 e 5, obtêm-se:

- **Por 2:**

$$\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$

- **Por 3:**
$$\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

- **Por 5:**
$$\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$$

Dessa forma, conclui-se que todas as frações abaixo são equivalentes:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{15}{20}$$

Isso significa que dividir um objeto em 4 partes e pegar 3 resulta na mesma quantidade que dividi-lo em 20 partes e pegar 15.

4.1 Simplificação de Frações

O processo de simplificação consiste em encontrar uma fração equivalente com os menores termos possíveis. Quando não existe mais nenhum número (além do 1) que divida o numerador e o denominador simultaneamente, diz-se que a fração é **irredutível**.

Exemplo 6. Identificando Frações Irredutíveis: Uma fração é classificada como **irredutível** quando não admite mais simplificações, ou seja, quando o Máximo Divisor Comum (MDC) entre o numerador e o denominador é igual a 1.

Analise-se os casos a seguir:

- $\frac{3}{5}$: Os números 3 e 5 são primos e o único divisor comum é 1. Logo, a fração é irredutível.

- $\frac{8}{9}$: Note-se que 8 e 9 **não** são números primos (8 é divisível por 2 e 4; 9 é divisível por 3). Porém, não possuem divisores em comum além do 1. Portanto, $\frac{8}{9}$ é uma fração irredutível.

- $\frac{6}{15}$: Ambos os números são divisíveis por 3. Logo, esta fração **não** é irredutível e deve ser simplificada para $\frac{2}{5}$.

Existem dois métodos principais para realizar a simplificação:

4.1.1 Método das Divisões Sucessivas

Realizam-se divisões consecutivas pelo menor divisor comum encontrado, até que não seja possível continuar.

Exemplo 7. Simplificando passo a passo: Considere-se a fração $\frac{24}{36}$.

$$\frac{24}{36} \xrightarrow{\div 2} \frac{12}{18} \xrightarrow{\div 2} \frac{6}{9} \xrightarrow{\div 3} \frac{2}{3}$$

A fração $\frac{2}{3}$ é a forma irredutível de $\frac{24}{36}$.

4.1.2 Método do Máximo Divisor Comum (MDC)

Divide-se ambos os termos diretamente pelo MDC entre o numerador e o denominador. Este método leva à fração irredutível em uma única etapa.

Exemplo 8. Simplificação direta pelo MDC: Para simplificar $\frac{45}{60}$, calcula-se primeiramente o MDC(45, 60).

Fatorando os números, constata-se que o maior divisor comum é 15. Logo:

$$\frac{45}{60} \xrightarrow{\div 15} \frac{3}{4}$$

5 Comparação de Números Racionais

Comparar dois números racionais consiste em estabelecer uma relação de ordem: determinar se são iguais (=), ou se um é maior (>) ou menor (<) que o outro.

5.1 Caso 1: Denominadores Iguais

Quando as frações possuem o mesmo denominador, compara-se apenas os numeradores. A fração com o maior numerador será a maior.

$$\frac{4}{7} > \frac{2}{7} \quad \text{pois} \quad 4 > 2$$

5.2 Caso 2: Denominadores Diferentes

Não é possível comparar diretamente numeradores quando as partes (denominadores) têm tamanhos diferentes. Nesse caso, deve-se:

a) Encontrar o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) dos denominadores.
b) Reescrever as frações como frações equivalentes com esse novo denominador.
c) Comparar os novos numeradores.

Exemplo 9. Comparando com denominadores distintos Qual número é maior: $\frac{2}{3}$ ou $\frac{5}{8}$?

Passo 1: Calcular o MMC(3, 8). Como são primos entre si, o MMC é $3 \times 8 = 24$.

Passo 2: Encontrar as frações equivalentes com denominador 24.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = \frac{16}{24}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$$

Passo 3: Comparar. Como $16 > 15$, conclui-se que $\frac{16}{24} > \frac{15}{24}$. Portanto:

$$\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$$

Atenção aos Negativos

Ao comparar números racionais negativos, a lógica inverte-se, pois quanto mais distante do zero (mais à esquerda na reta), menor é o número.

Exemplo: Embora $5 > 2$, temos que $-5 < -2$. Portanto:

$$-\frac{5}{7} < -\frac{2}{7}$$

6 Fração Geratriz

Vimos anteriormente que as dízimas periódicas são números racionais. Portanto, elas podem ser escritas na forma de fração $\frac{a}{b}$. A fração que dá origem a uma dízima periódica é denominada **fração geratriz**.

Para encontrá-la, utiliza-se um método algébrico fundamentado na subtração de equações, com o objetivo de eliminar a parte decimal infinita.

6.1 Dízima Periódica Simples

Nas dízimas simples, o período (a parte que se repete) começa imediatamente após a vírgula.

Exemplo 10. Encontrando a geratriz de uma dízima simples Determinar a fração geratriz do número $0,555...$

Passo 1: Iguala-se a dízima a uma incógnita x.

$$x = 0,555...$$

Passo 2: Multiplica-se a equação por 10, pois o período tem apenas 1 algarismo (o 5), para "puxar"um período para a frente da vírgula.

$$10x = 5,555...$$

Passo 3: Subtrai-se a equação original da equação multiplicada.

$$\begin{array}{rr} & 10x = 5,555... \\ - & x = 0,555... \\ \hline & 9x = 5 \end{array}$$

Passo 4: Isola-se o x.

$$x = \frac{5}{9}$$

Portanto, a fração geratriz de $0,555...$ é $\frac{5}{9}$.

6.2 Dízima Periódica Composta

Nas dízimas compostas, existe uma parte não periódica (o antiperíodo) entre a vírgula e o período. O processo exige uma etapa adicional para isolar o período.

Exemplo 11. Encontrando a geratriz de uma dízima composta Determinar a fração geratriz do número $1,2333...$

Note-se que o algarismo **2** não se repete (antiperíodo), enquanto o **3** é o período.

Passo 1: Iguala-se a x.

$$x = 1,2333...$$

Passo 2: Multiplica-se a equação por 10 para deslocar a vírgula até o início do período (após o 2).

$$10x = 12,333... \quad \text{(Equação I)}$$

Passo 3: Multiplica-se a equação original por 100 (deslocamento do antiperíodo + período) para obter outra equação com a mesma parte decimal.

$$100x = 123,333... \quad \text{(Equação II)}$$

Passo 4: Subtrai-se a Equação I da Equação II.

$$\begin{array}{rrl} & 100x = & 123,333... \\ - & 10x = & 12,333... \\ \hline & 90x = & 111 \end{array}$$

Passo 5: Simplifica-se a fração resultante.

$$x = \frac{111}{90}$$

Dividindo-se numerador e denominador por 3:

$$x = \frac{37}{30}$$

Dica Prática

Existe um padrão observável nos denominadores das frações geratrizes:

- Para cada algarismo do **período**, coloca-se um número **9** no denominador.
- Para cada algarismo do **antiperíodo** (após a vírgula), coloca-se um número **0** no denominador.

No exemplo anterior ($1,2333...$): um algarismo no período (3) → um 9; um algarismo no antiperíodo (2) → um 0. Resultado do denominador: 90.

7 Adição e Subtração de Números Racionais

As operações de adição e subtração com números racionais exigem atenção à forma como os números estão representados. Abordaremos os procedimentos para a forma decimal e para a forma fracionária separadamente.

7.1 Operações na Forma Decimal

Para somar ou subtrair números decimais, o princípio fundamental é o **alinhamento das ordens**. Isso significa que vírgula deve estar abaixo de vírgula, garantindo que décimos sejam somados com décimos, centésimos com centésimos, e assim por diante.

Algoritmo da Adição Decimal

Para efetuar a operação $3,58 + 1,2$, deve-se:

a) Organizar os números verticalmente, alinhando as vírgulas.
b) Preencher as casas decimais vazias com zeros (opcional, mas recomendável para evitar erros).
c) Realizar a soma normalmente e manter a vírgula na mesma posição no resultado.

$$\begin{array}{r} 3,58 \\ +1,20 \\ \hline 4,78 \end{array}$$

Exemplo 12. Subtração com "empréstimo": Calcule $5 - 1,34$.

Como o número 5 é inteiro, escreve-se $5,00$ para igualar as casas decimais antes de subtrair.

$$\begin{array}{r} 5,00 \\ -\,1,34 \\ \hline 3,66 \end{array}$$

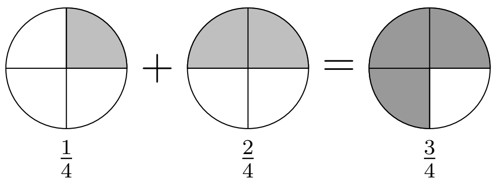
7.2 Operações na Forma Fracionária

Na representação fracionária, a adição e a subtração interpretam-se como a junção ou a remoção de partes de um todo. Existem dois casos a considerar.

7.2.1 Caso 1: Denominadores Iguais

Quando os denominadores são iguais, as partes em que os inteiros foram divididos têm o mesmo tamanho. Basta somar (ou subtrair) os numeradores e manter o denominador.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



No exemplo acima, somou-se uma fatia de um quarto com duas fatias de um quarto, resultando em três fatias de um quarto.

7.2.2 Caso 2: Denominadores Diferentes

Quando os denominadores são diferentes, as "fatias"têm tamanhos diferentes e não podem ser somadas diretamente. É necessário encontrar um denominador comum (MMC) para igualar os tamanhos das divisões.

Passo a Passo com Denominadores Distintos

Para calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$:

a) **Encontrar o MMC:** O Mínimo Múltiplo Comum entre 2 e 3 é 6. Este será o novo denominador.

b) **Equivalência:** Divide-se o novo denominador pelo antigo e multiplica-se pelo numerador.

$$\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6} \quad \text{e} \quad \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$$

c) **Operação:** Agora que as partes são iguais (sextos), realiza-se a soma.

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Exemplo 13. Subtração com denominadores diferentes: Calcule $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$.

- O MMC de 4 e 6 é 12.
- Convertendo as frações:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} \quad \text{(multiplicou-se por 3)}$$
$$\frac{1}{6} = \frac{2}{12} \quad \text{(multiplicou-se por 2)}$$

- Calculando:

$$\frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$$

7.3 Operações com Representações Mistas

Frequentemente, encontra-se a necessidade de somar um número decimal com uma fração. Nesses casos, deve-se converter ambos para a mesma "linguagem"(ambos para fração ou ambos para decimal) antes de operar.

Exemplo 14. Escolhendo a melhor estratégia Calcular $0,25 + \frac{1}{2}$.

Opção A (Tudo em Decimal): Sabemos que $\frac{1}{2} = 0,5$. Logo:

$$0,25 + 0,5 = 0,75$$

Opção B (Tudo em Fração): Sabemos que $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. Logo:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

O MMC(4,2) é 4. Transformando $\frac{1}{2}$ em $\frac{2}{4}$:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

Note-se que $0,75$ e $\frac{3}{4}$ representam o mesmo número racional.

8 Multiplicação de Números Racionais

A multiplicação de números racionais segue propriedades específicas dependendo da forma de representação (decimal ou fracionária), mas em todos os casos deve-se respeitar a regra de sinais.

Regra de Sinais

A regra para multiplicação e divisão é a mesma dos números inteiros:

- Sinais IGUAIS resultam em **POSITIVO** ($+ \cdot + = +$ ou $- \cdot - = +$).
- Sinais DIFERENTES resultam em **NEGATIVO** ($+ \cdot - = -$ ou $- \cdot + = -$).

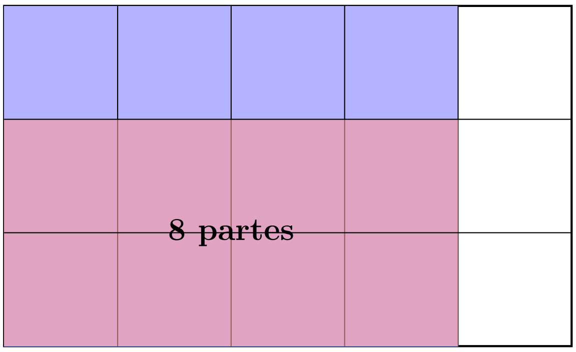
8.1 Multiplicação na Forma Fracionária

Para multiplicar frações, a propriedade é direta: multiplicamos numerador por numerador e denominador por denominador.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Exemplo 15. Visualizando a multiplicação como área: Vamos calcular $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$.

Isso equivale a perguntar: "Quanto é dois terços de quatro quintos?". Imagine um retângulo (o todo) dividido em 5 colunas verticais e 3 linhas horizontais.



O total de partes é $3 \times 5 = 15$. A área comum tem $2 \times 4 = 8$ partes.

Portanto:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

Exemplo 16. Simplificação Cruzada: Antes de multiplicar, podemos simplificar qualquer numerador com qualquer denominador para facilitar o cálculo.

Calcule $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$.

- Simplificamos o 4 (numerador) com o 8 (denominador) por 4.
- Simplificamos o 3 (numerador) com o 9 (denominador) por 3.

$$\frac{\cancel{4}^1}{\cancel{9}_3} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{8}_2} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

8.2 Multiplicação na Forma Decimal

Na forma decimal, multiplicamos os números como se fossem inteiros (ignorando a vírgula momentaneamente). Ao final, a quantidade de casas decimais do resultado será a **soma** das casas decimais dos fatores.

Algoritmo da Multiplicação

Calcule $2,3 \cdot 1,4$.

a) $2,3$ tem **1** casa decimal.

b) $1,4$ tem **1** casa decimal.

c) Total de casas no resultado: $1 + 1 = \mathbf{2}$.

$$
\begin{array}{rl}
23 & \\
\times 14 & \\
\hline
92 & (4 \times 23) \\
+230 & (10 \times 23) \\
\hline
322 &
\end{array}
$$

Aplicando as 2 casas decimais no resultado 322, obtemos: **3,22**.

9 Divisão de Números Racionais

9.1 Divisão na Forma Fracionária

Para dividir frações, utilizamos a ideia de operação inversa. Transformamos a divisão em uma multiplicação.

Regra Prática

Para dividir duas frações:

a) **Conserva-se** a primeira fração.

b) **Inverte-se** a segunda fração (o numerador vira denominador e vice-versa).

c) **Multiplica-se** as duas.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Exemplo 17. Divisão passo a passo: Calcule $\frac{2}{5} \div \frac{3}{7}$.

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$$

9.2 Divisão na Forma Decimal

O segredo para dividir decimais é **eliminar a vírgula**. Para isso, multiplicamos o dividendo e o divisor por 10, 100 ou 1000 (movendo a vírgula para a direita) até que ambos se tornem números inteiros.

Exemplo 18. Igualando as casas: Calcule $6 \div 0,3$.

O divisor $0,3$ tem uma casa decimal. Para eliminá-la, movemos a vírgula uma casa para a direita em ambos os números.

- $0,3 \to 3$
- $6 \to 60$ (o 6,0 vira 60)

Agora, efetuamos a divisão equivalente: $60 \div 3 = 20$.

Exemplo 19. Dividindo fração por decimal: Calcule $-\frac{1}{2} \div 0,2$.

Podemos converter tudo para fração:

$$-\frac{1}{2} \div \frac{2}{10}$$

Simplificando $\frac{2}{10}$ para $\frac{1}{5}$:

$$-\frac{1}{2} \div \frac{1}{5} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{1} = -\frac{5}{2}$$

Ou, em decimal $(-2,5)$.

10 Potenciação e Radiciação

Assim como nos números inteiros, as operações de potenciação e radiciação aplicam-se aos números racionais, respeitando as propriedades fundamentais da aritmética.

10.1 Potenciação de Números Racionais

A potenciação representa uma multiplicação repetida de fatores iguais. Quando a base é uma fração, eleva-se tanto o numerador quanto o denominador ao expoente indicado.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemplo 20. Potência de frações: Para calcular o quadrado de dois quintos:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$$

Exemplo 21. Regra de sinais na base: O comportamento dos sinais segue o padrão dos números inteiros:

- Base negativa e expoente **par** resultam em valor **positivo**.

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

- Base negativa e expoente **ímpar** resultam em valor **negativo**.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{(-1)^3}{2^3} = -\frac{1}{8}$$

10.1.1 Potência com Expoente Negativo

Esta é uma propriedade fundamental no estudo dos racionais. O sinal negativo no expoente indica a necessidade de calcular o inverso multiplicativo da base.

Propriedade do Expoente Negativo

Para resolver uma potência com expoente negativo:

a) **Inverte-se** a base (o numerador troca de lugar com o denominador).

b) **Troca-se** o sinal do expoente para positivo.

c) **Calcula-se** a potência normalmente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Exemplo 22. Expoente negativo em frações: Calcule $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

Invertendo a base de $\frac{2}{3}$ para $\frac{3}{2}$ e alterando o sinal do expoente:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

Exemplo 23. Expoente negativo em inteiros: Calcule 5^{-2}.

Recorda-se que 5 equivale a $\frac{5}{1}$. Ao inverter, obtém-se $\frac{1}{5}$.

$$5^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2} = \frac{1^2}{5^2} = \frac{1}{25}$$

10.2 Radiciação de Números Racionais

A raiz quadrada (ou de outro índice) de um número racional na forma fracionária é obtida extraindo-se a raiz do numerador e a raiz do denominador separadamente.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemplo 24. Raiz quadrada exata:

$$\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}$$

Exemplo 25. Raiz de número decimal: Para calcular $\sqrt{0,36}$, a estratégia mais segura é converter o decimal para fração:

a) Converte-se: $0,36 = \frac{36}{100}$.

b) Calcula-se a raiz:

$$\sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{100}} = \frac{6}{10}$$

c) Simplifica-se ou converte-se para decimal: $0,6$ ou $\frac{3}{5}$.

Condição de Existência

No conjunto dos números racionais, não existe raiz quadrada de número negativo.

$$\sqrt{-\frac{4}{9}} \notin \mathbb{Q}$$

Não se deve confundir com $-\sqrt{\frac{4}{9}}$, que resulta em $-\frac{2}{3}$. O sinal fora da raiz é mantido; o sinal dentro da raiz (se o índice for par) torna a operação impossível nos Reais.

11 Expressões Numéricas

As expressões numéricas envolvendo números racionais seguem a mesma ordem de prioridade das operações válida para os números inteiros. O rigor na obediência a essa ordem é fundamental para garantir a correção do resultado.

Ordem das Operações

Para resolver expressões, deve-se seguir rigorosamente a sequência:

a) **Potenciação e Radiciação** (na ordem em que aparecerem).

b) **Multiplicação e Divisão** (na ordem em que aparecerem).

c) **Adição e Subtração** (na ordem em que aparecerem).

Quanto aos sinais de associação (agrupamento), resolve-se primeiramente o que está nos **Parênteses** (), seguidos pelos **Colchetes** [] e, por fim, pelas **Chaves** {}.

Exemplo 26. Uso dos parênteses: Calcule o valor da expressão:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}\right)$$

Primeiramente, resolve-se a multiplicação dentro dos parênteses:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{15}$$

Simplificando por 3, obtemos $\frac{2}{5}$.

A expressão torna-se:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

O MMC entre 2 e 5 é 10.

$$\frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$$

Exemplo 27. Mistura de decimais e potências: Calcule:

$$(0,5)^2 + \frac{3}{4} \div \sqrt{\frac{9}{16}}$$

Passo 1: Potências e Raízes. Sabemos que $0,5 = \frac{1}{2}$. Logo, $(0,5)^2 = 0,25$ ou $\frac{1}{4}$. A raiz de $\frac{9}{16}$ é $\frac{3}{4}$.

Substituindo na expressão:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \div \frac{3}{4}$$

Passo 2: Divisão. A divisão tem prioridade sobre a soma.

$$\frac{3}{4} \div \frac{3}{4} = 1$$

Passo 3: Adição.

$$\frac{1}{4} + 1$$

Como $1 = \frac{4}{4}$, temos:

$$\frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{5}{4}$$

Exemplo 28. Expressão completa com sinais: Calcule o valor de A, onde:

$$A = \left[-\frac{1}{2} + \left(-\frac{2}{3}\right) \div \frac{4}{3}\right] \cdot (-2)$$

Primeiro, resolvemos a divisão dentro do parêntese interno (atenção ao sinal):

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

A expressão dentro do colchete passa a ser:

$$\left[-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = -\frac{2}{2} = -1$$

Por fim, multiplicamos pelo fator externo:

$$A = [-1] \cdot (-2)$$

$$A = 2$$

12 Exercícios

Exercício 1. Efetue as seguintes adições e subtrações, simplificando o resultado sempre que possível:

a) $\frac{2}{3} - \frac{5}{6}$

b) $-\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{8}\right)$

c) $2 - \frac{7}{5}$

d) $-\frac{5}{9} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$

Exercício 2. Realize as operações indicadas envolvendo números na forma decimal:

a) $3,45 + 12,8$

b) $5 - 1,23$

c) $-4,5 - 2,9$

d) $0,004 - 0,12$

Exercício 3. Calcule os produtos e quocientes, atentando-se à regra de sinais:

a) $\left(-\frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{21}{8}\right)$

b) $\frac{9}{5} \div \left(-\frac{3}{10}\right)$

c) $(-2) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$

d) $\left(-\frac{3}{2}\right) \div 6$

Exercício 4. Converta os números para uma mesma forma de representação (fracionária ou decimal) e calcule o valor das expressões:

a) $0,75 + \frac{1}{2}$

b) $\frac{4}{5} - 1,2$

c) $0,6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

d) $\frac{1}{4} \div 0,5$

Exercício 5. Aplique as propriedades da potenciação para calcular:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

d) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}$

e) $(-2)^{-3}$

Exercício 6. Determine o valor das raízes quadradas:

a) $\sqrt{\frac{25}{81}}$

b) $\sqrt{1,44}$

c) $\sqrt{\frac{1}{100}}$

d) $\sqrt{0,09}$

Exercício 7. (Expressões Numéricas) Calcule o valor de cada expressão, respeitando a ordem das operações:

a) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right)$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$

c) $\sqrt{\frac{9}{16}} - \left(1 - \frac{3}{2}\right)^{-1}$

d) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}$

Exercício 8. Determine o valor de X, sabendo que:

$$X = \left[-2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right] \cdot \sqrt{0,04}$$

Exercício 9. Dentre os números abaixo, determine quais são racionais:

a) 23

b) 5,345

c) $\sqrt{2}$

d) 2,313131...

e) $\frac{1}{3}$

f) 0,444...

g) $-\frac{2}{7}$

h) $\sqrt[4]{25}$

i) -0,111...

j) $-\frac{349}{12}$

k) $\sqrt[3]{27}$

l) 89,1011121314...

m) π

n) $\sqrt{0,04}$

Exercício 10. Quais afirmações são verdadeiras e por que?

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

c) $1 \in \mathbb{Q}$

d) $1 \in \mathbb{Z}$

e) $\mathbb{N} \in \mathbb{Q}$

f) se $r \in \mathbb{Q}$, então $-r \in \mathbb{Q}$

g) $\frac{40}{8} \in \mathbb{Q}$

h) $\frac{40}{8} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

Exercício 11. Represente os números a seguir em uma reta orientada:

$$3,5 \quad ; \quad -\frac{9}{4} \quad ; \quad 0 \quad ; \quad \frac{14}{7} \quad ; \quad 5,\overline{2} \quad ; \quad -\frac{30}{7}$$

Exercício 12. Uma barra de chocolate é dividida entre Nelly, Penha e Sônia. Sabe-se que Nelly ganha $\frac{2}{5}$ da barra, Penha ganha $\frac{1}{4}$ e Sônia ganha 70 gramas. Qual o peso total, em gramas, da barra?

Exercício 13. Utilize os sinais de $<$ e $>$ para comparar as frações em cada item:

a) $\frac{20}{6} \quad \frac{8}{3}$

b) $\frac{8}{11} \quad \frac{29}{40}$

c) $-\frac{7}{15} \quad -\frac{15}{31}$

d) $-\frac{32}{9} \quad -\frac{65}{19}$

Exercício 14. Responda:

a) O número $\frac{40}{6}$ é racional?

b) Entre quais inteiros ele se localiza na reta numérica?

Exercício 15. Reponda:

a) O número $-\frac{19}{4}$ é racional?

b) Entre quais inteiros ele se localiza na reta numérica?

Exercício 16. Um robô iniciou um estudo no solo de Marte e perfurou até 8,5 metros. Após recolher material, subiu 4,9 metros para análise. A qual distância da superfície ele se encontra?

Exercício 17. Qual o valor da expressão?

$$5 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \left[\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}\right] : \frac{6}{5}}$$

Exercício 18. Qual o valor da expressão:

$$1 : \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{(1+1)^2}\right)^2}\right)^2$$

Exercício 19. Na expressão abaixo, letras diferentes representam dígitos diferentes e letras iguais representam dígitos iguais.

$$\frac{M \times A \times T \times E \times M}{A \times T \times I \times C \times A}$$

Qual é o maior valor possível desta expressão?

Exercício 20. Sabe-se que $\frac{2}{9}$ do conteúdo de uma garrafa enchem $\frac{6}{5}$ de um copo. Para encher 15 copos iguais a esse, quantas garrafas deverão ser usadas?

Exercício 21. Simplifique a seguinte fração:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 12 + 7 \cdot 14 \cdot 21}{1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 + 4 \cdot 12 \cdot 20 + 7 \cdot 21 \cdot 35}$$

13 Lista Complementar - Operações com Frações

Esta seção destina-se ao treino intensivo das regras operatórias com frações. Lembre-se: a prática leva à precisão. Simplifique o resultado final sempre que possível.

Exercício 22. (Simplificação) Torne as seguintes frações irredutíveis:

a) $\frac{4}{8}$
b) $\frac{12}{18}$
c) $\frac{15}{20}$
d) $\frac{24}{36}$
e) $\frac{45}{60}$
f) $\frac{18}{30}$
g) $\frac{42}{49}$
h) $\frac{33}{11}$
i) $\frac{100}{250}$
j) $\frac{120}{144}$
k) $\frac{81}{27}$
l) $\frac{14}{21}$

Exercício 23. (Soma e Subtração - Denominadores Iguais) Calcule:

a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$
b) $\frac{5}{9} - \frac{2}{9}$
c) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$
d) $\frac{7}{3} - \frac{2}{3}$
e) $\frac{15}{8} - \frac{3}{8}$
f) $-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$
g) $\frac{1}{10} + \frac{7}{10} - \frac{3}{10}$
h) $\frac{5}{6} + \frac{1}{6}$
i) $-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}$

Exercício 24. (Soma e Subtração - Denominadores Diferentes) Calcule (use o MMC):

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$
c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$
d) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$
e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$
f) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$
g) $\frac{7}{10} - \frac{2}{5}$
h) $\frac{4}{9} + \frac{1}{3}$
i) $\frac{3}{8} + \frac{5}{12}$
j) $2 + \frac{1}{3}$
k) $1 - \frac{3}{4}$
l) $\frac{5}{2} - 3$
m) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$
n) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$
o) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}$

Exercício 25. (Multiplicação) Efetue as multiplicações (tente simplificar antes de multiplicar):

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$
b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}$
c) $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2}$
d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$
e) $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{15}$
f) $6 \cdot \frac{2}{3}$
g) $\frac{7}{10} \cdot 5$
h) $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$
i) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)$
j) $\frac{12}{35} \cdot \frac{7}{4}$
k) $\frac{11}{3} \cdot \frac{9}{22}$
l) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 \cdot \frac{1}{5}$

Exercício 26. (Divisão) Calcule as divisões (multiplique pelo inverso):

a) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$
c) $\frac{4}{7} \div 2$
d) $3 \div \frac{1}{2}$
e) $\frac{3}{4} \div \frac{3}{8}$
f) $\frac{5}{6} \div \frac{5}{6}$
g) $\frac{1}{10} \div \frac{1}{100}$
h) $\left(-\frac{2}{3}\right) \div \frac{4}{9}$
i) $\frac{7}{8} \div \left(-\frac{21}{16}\right)$
j) $\frac{15}{4} \div 5$
k) $10 \div \frac{2}{5}$
l) $\left(-\frac{1}{5}\right) \div \left(-\frac{1}{10}\right)$

Exercício 27. (Potenciação e Radiciação) Calcule:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$
b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$
c) $\left(-\frac{1}{4}\right)^2$
d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$
e) $\left(\frac{5}{3}\right)^0$
f) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$
g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$
h) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}$
i) $\sqrt{\frac{1}{4}}$
j) $\sqrt{\frac{49}{64}}$
k) $\sqrt{\frac{100}{81}}$
l) $\sqrt{\frac{121}{36}}$

Exercício 28. (Expressões) Resolva respeitando a ordem das operações:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}$
c) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
d) $2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$
e) $\sqrt{\frac{1}{16}} + \sqrt{\frac{1}{9}}$
f) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)$
g) $\frac{1}{2} \div \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$
h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 16$

Resoluções