Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

Material de Apoio e Lista de Exercícios

Plano Cartesiano

Professor: **Danilo Kanno**

Guaratinguetá

1 O Plano Cartesiano

Um pouco de História: René Descartes

O sistema de coordenadas ortogonais, comumente chamado de Plano Cartesiano, recebe este nome em homenagem a René Descartes (1596-1650), um importante filósofo e matemático francês. Descartes teve a notável ideia de relacionar a Álgebra e a Geometria, estabelecendo um método que permite representar pontos e figuras geométricas por meio de números. Essa estruturação é a base fundamental para os sistemas de localização e navegação modernos, como o GPS.

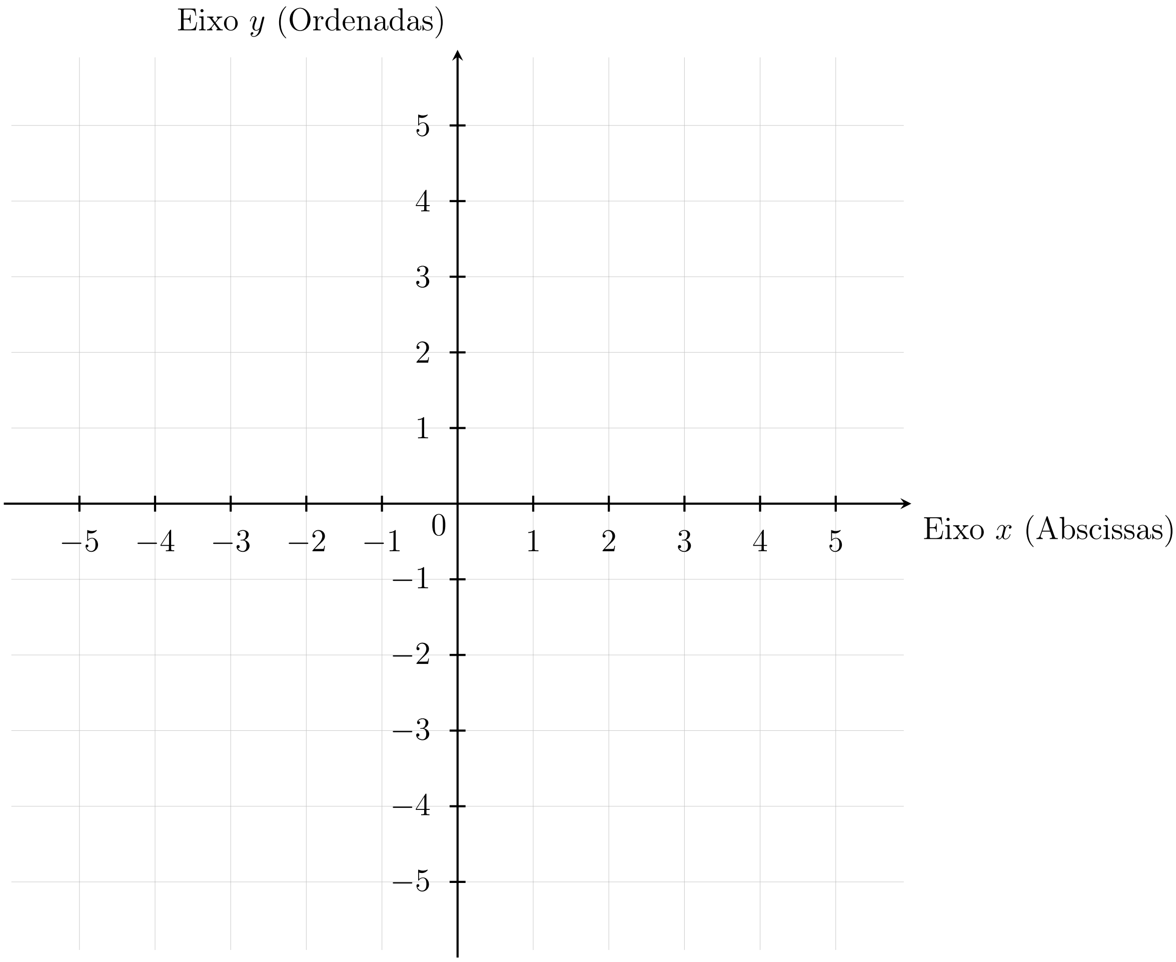
O Plano Cartesiano é um sistema de referência bidimensional estruturado a partir de duas retas numéricas que se cruzam perpendicularmente (formando um ângulo de 90°). O ponto exato de interseção dessas duas retas é denominado **Origem** do sistema.

Elementos do Plano Cartesiano

As duas retas numéricas que formam este plano são chamadas de eixos coordenados. Cada eixo possui uma nomenclatura específica:

- **Eixo das Abscissas (Eixo x):** É a reta numérica disposta na posição horizontal. A partir da origem, os valores positivos situam-se à direita e os valores negativos, à esquerda.
- **Eixo das Ordenadas (Eixo y):** É a reta numérica disposta na posição vertical. A partir da origem, os valores positivos situam-se acima e os valores negativos, abaixo.

O diagrama a seguir ilustra a estrutura básica do plano cartesiano e seus eixos:



2 Pares Ordenados e Localização de Pontos

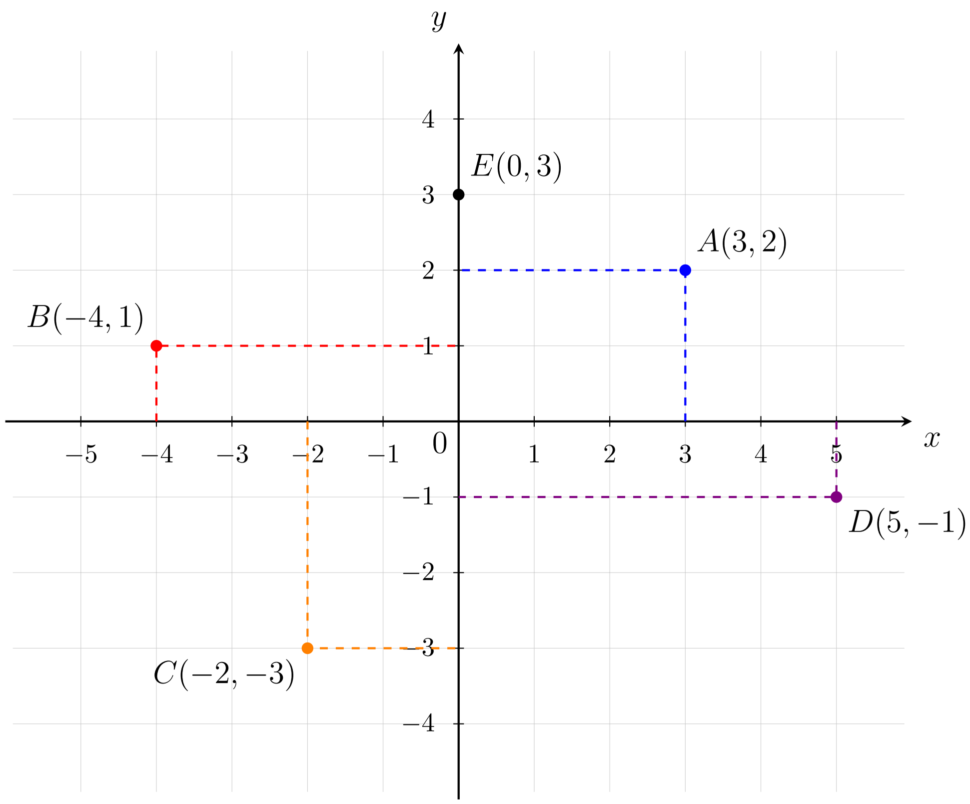
Para determinar a posição exata de qualquer ponto no Plano Cartesiano, utiliza-se um sistema de coordenadas denominado **par ordenado**. Um par ordenado é representado por dois números entre parênteses, separados por vírgula (ou ponto e vírgula), na forma matemática (x, y).

A ordem dos números é estritamente rigorosa e não pode ser invertida:

- O **primeiro número** (x) indica o deslocamento horizontal, ou seja, a posição do ponto em relação ao eixo das abscissas.
- O **segundo número** (y) indica o deslocamento vertical, ou seja, a posição do ponto em relação ao eixo das ordenadas.

Exemplo 1. Considere a necessidade de representar os seguintes pontos no plano cartesiano: $A(3,2)$, $B(-4,1)$, $C(-2,-3)$, $D(5,-1)$ e $E(0,3)$.

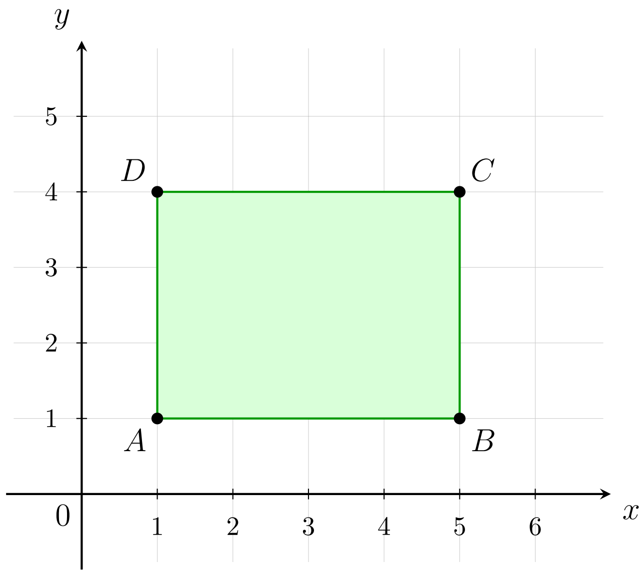
Para marcar o ponto $A(3,2)$, por exemplo, localiza-se o número 3 no eixo x e o número 2 no eixo y. O ponto de encontro das retas perpendiculares traçadas a partir desses valores determina a posição do ponto A. Observe a representação gráfica:



3 Polígonos no Plano Cartesiano

A representação de figuras geométricas no plano cartesiano é realizada marcando-se os seus vértices, que são fornecidos por pares ordenados, e interligando-os consecutivamente por meio de segmentos de reta. Este recurso é fundamental para a Geometria, pois além de facilitar a visualização da forma, permite a contagem direta de unidades na malha quadriculada para deduzir medidas de comprimento, como a base e a altura.

Exemplo 2. Considere os pontos $A(1,1)$, $B(5,1)$, $C(5,4)$ e $D(1,4)$. Ao representar esses pontos no plano coordenado e conectá-los na ordem $A \to B \to C \to D \to A$, determina-se um polígono.



Observando a figura disposta na malha, constata-se que o polígono formado é um **retângulo**. É possível determinar suas dimensões contando os quadrados da malha:

- A **base** mede 4 unidades (deslocamento horizontal do 1 ao 5 no eixo x).
- A **altura** mede 3 unidades (deslocamento vertical do 1 ao 4 no eixo y).

4 Simetria no Plano Cartesiano

O conceito de simetria pode ser explorado de maneira bastante visual e algébrica no Plano Cartesiano. A reflexão de um ponto em relação aos eixos coordenados ou à origem gera um novo par ordenado, denominado ponto simétrico.

Regras de Simetria para um Ponto (x, y)

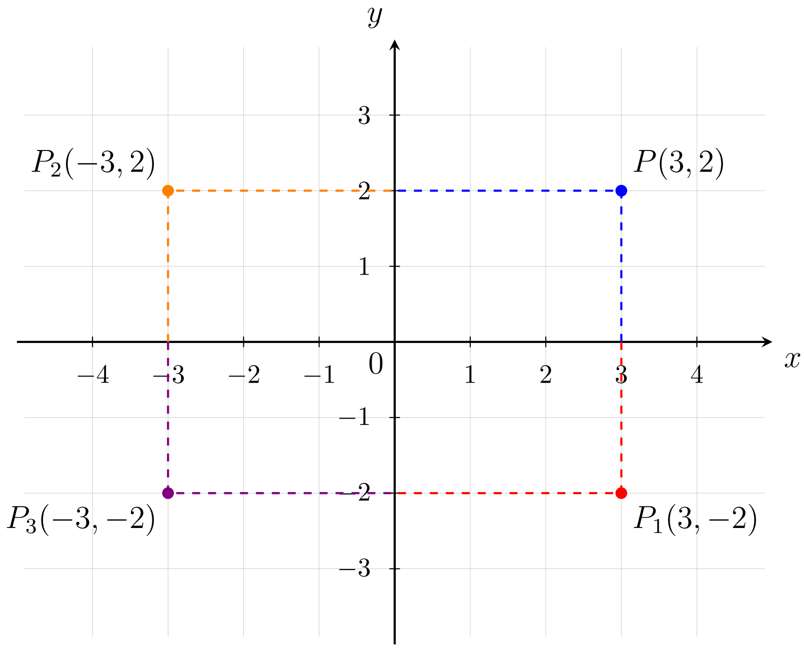
- **Em relação ao Eixo x (Abscissas):** Mantém-se o valor da abscissa (x) e inverte-se o sinal da ordenada (y). Logo, o simétrico é o ponto $(x, -y)$.
- **Em relação ao Eixo y (Ordenadas):** Inverte-se o sinal da abscissa (x) e mantém-se o valor da ordenada (y). Logo, o simétrico é o ponto $(-x, y)$.
- **Em relação à Origem $(0, 0)$:** Invertem-se os sinais de ambas as coordenadas. Logo, o simétrico é o ponto $(-x, -y)$.

Exemplo 3. Determinando pontos simétricos Considere o ponto $P(3,2)$ localizado no 1º quadrante. Deseja-se encontrar e representar os seus pontos simétricos em relação ao eixo x, ao eixo y e à origem.

Aplicando as regras descritas anteriormente:

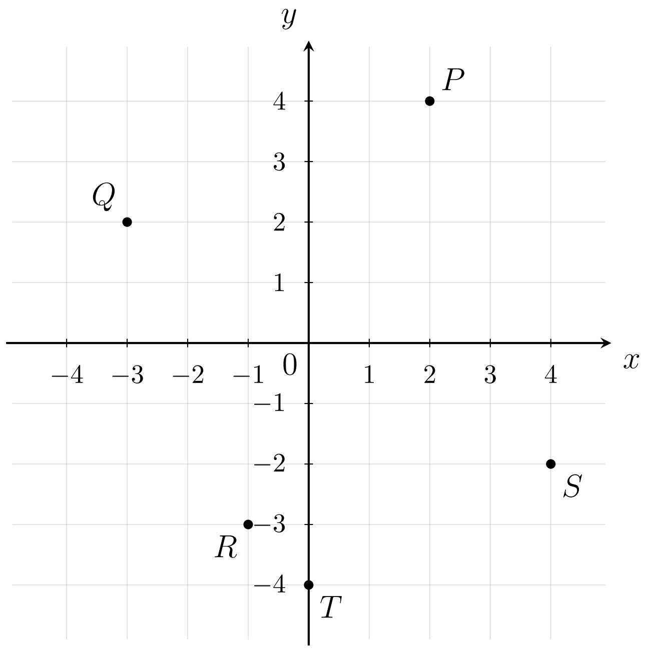
- O simétrico de P em relação ao eixo x é $P_1(3,-2)$.
- O simétrico de P em relação ao eixo y é $P_2(-3,2)$.
- O simétrico de P em relação à origem é $P_3(-3,-2)$.

A representação gráfica a seguir ilustra essas reflexões. Nota-se que as distâncias dos pontos simétricos até o eixo de reflexão são idênticas à distância do ponto original até o mesmo eixo.



5 Exercícios Resolvidos

Exemplo 4. Determine as coordenadas dos pontos representados no plano cartesiano a seguir:



Resolução: Para determinar as coordenadas de um ponto, observa-se primeiramente o seu alinhamento em relação ao eixo das abscissas (eixo x) e, em seguida, ao eixo das ordenadas (eixo y).

- O ponto P está alinhado com o 2 no eixo x e com o 4 no eixo y. Logo, suas coordenadas são $P(2, 4)$.
- O ponto Q está alinhado com o -3 no eixo x e com o 2 no eixo y. Logo, $Q(-3, 2)$.
- O ponto R está alinhado com o -1 no eixo x e com o -3 no eixo y. Logo, $R(-1, -3)$.
- O ponto S está alinhado com o 4 no eixo x e com o -2 no eixo y. Logo, $S(4, -2)$.
- O ponto T está localizado exatamente sobre o eixo y, no valor -4. Isso significa que seu deslocamento horizontal é nulo. Logo, $T(0, -4)$.

Exemplo 5. Indique a qual quadrante pertence cada um dos pontos abaixo, sem a necessidade de representá-los graficamente no plano cartesiano.

a) $A(5, 8)$

b) $B(-7, 3)$

c) $C(-2, -9)$

d) $D(6, -1)$

Resolução: Para responder a esta questão, analisa-se estritamente o sinal algébrico de cada coordenada (x, y), relacionando-o com as características dos quadrantes.

a) O ponto $A(5, 8)$ possui ambas as coordenadas positivas $(+, +)$. Portanto, pertence ao **1º Quadrante**.

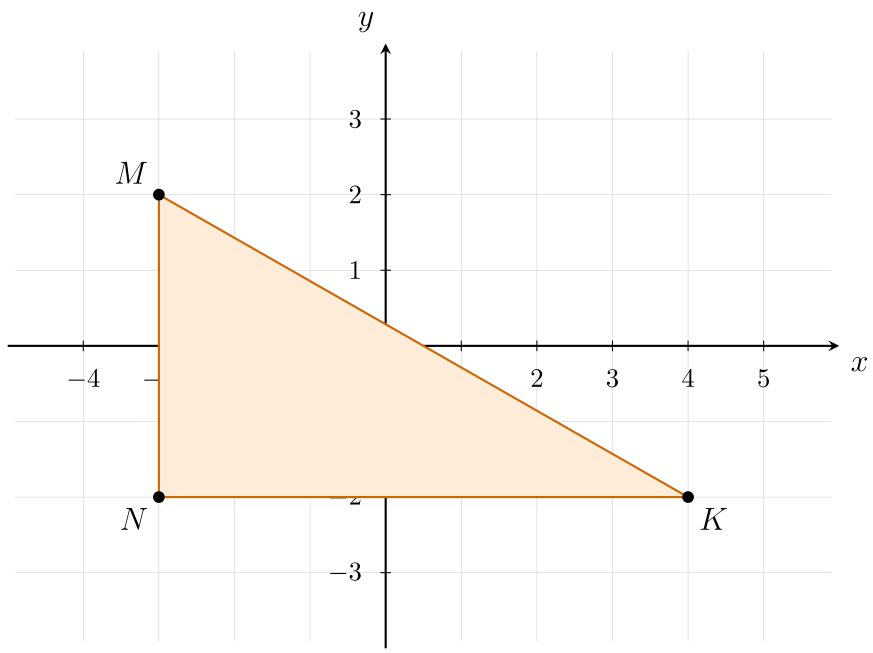
b) O ponto $B(-7, 3)$ possui abscissa negativa e ordenada positiva $(-, +)$. Portanto, pertence ao **2º Quadrante**.

c) O ponto $C(-2, -9)$ possui ambas as coordenadas negativas $(-, -)$. Portanto, pertence ao **3º Quadrante**.

d) O ponto $D(6, -1)$ possui abscissa positiva e ordenada negativa $(+, -)$. Portanto, pertence ao **4º Quadrante**.

Exemplo 6. Represente no plano cartesiano os pontos $M(-3, 2)$, $N(-3, -2)$ e $K(4, -2)$. Em seguida, interligue-os na ordem $M \to N \to K \to M$. Classifique o polígono formado e determine a medida de seus lados paralelos aos eixos coordenados.

Resolução: Inicialmente, localizam-se os pontos na malha quadriculada e traçam-se os segmentos de reta unindo os vértices fornecidos.



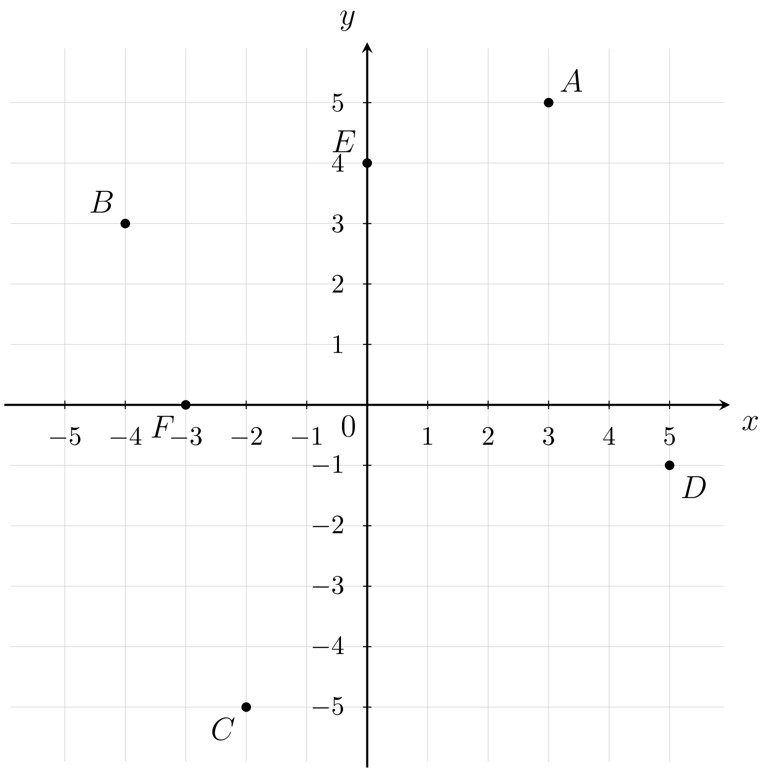
Observando a representação, conclui-se que o polígono formado é um **triângulo retân-**

gulo, pois os lados formados sobre a malha quadriculada são perpendiculares entre si. Realizando a contagem dos quadrados da malha, obtêm-se as seguintes medidas:

- O lado vertical MN mede 4 **unidades** (deslocamento do 2 até o -2 no eixo y).
- O lado horizontal NK mede 7 **unidades** (deslocamento do -3 até o 4 no eixo x).

6 Exercícios

Exercício 1. Observe o plano cartesiano abaixo e determine as coordenadas de cada um dos pontos assinalados.



a) $A(\_\_,\_\_)$
b) $B(\_\_,\_\_)$
c) $C(\_\_,\_\_)$
d) $D(\_\_,\_\_)$
e) $E(\_\_,\_\_)$
f) $F(\_\_,\_\_)$

Exercício 2. Sem construir um gráfico, analise os sinais das coordenadas e identifique em qual quadrante (ou eixo) cada ponto está localizado.

a) $P(9, 2)$
b) $Q(-4, -8)$
c) $R(-1, 5)$
d) $S(6, -3)$
e) $T(0, 7)$
f) $U(-2, 0)$

Exercício 3. Utilizando um papel quadriculado, construa um plano cartesiano e represente os pontos $V(-3, 1)$, $W(2, 1)$, $X(2, -4)$ e $Y(-3, -4)$. Em seguida, responda:

a) Ao interligar os pontos na ordem $V \to W \to X \to Y \to V$, qual polígono é formado?

b) Qual é a medida da base deste polígono (segmento VW ou YX)?

c) Qual é a medida da altura deste polígono (segmento WX ou VY)?

Exercício 4. Um navio partiu da origem $(0,0)$ e navegou 4 unidades para a direita (sentido leste). Em seguida, navegou 3 unidades para cima (sentido norte). Qual é o par ordenado que representa a posição final do navio?

Exercício 5. Determine as coordenadas dos pontos simétricos aos pares ordenados dados, respeitando o eixo de reflexão solicitado em cada alternativa:

a) Simétrico de $A(4,7)$ em relação ao eixo das abscissas (eixo x).

b) Simétrico de $B(-2,5)$ em relação ao eixo das ordenadas (eixo y).

c) Simétrico de $C(-6,-1)$ em relação à origem $(0,0)$.

d) Simétrico de $D(3,-8)$ em relação ao eixo y.

e) Simétrico de $E(0,5)$ em relação ao eixo x.

Exercício 6. Analise as afirmações abaixo sobre simetria no plano cartesiano e classifique-as como Verdadeiras (V) ou Falsas (F). Em seguida, reescreva as afirmações falsas corrigindo-as.

a) ( ) O ponto simétrico de $(2,3)$ em relação à origem é o ponto $(-2,-3)$.

b) ( ) Ao refletir um ponto do 2º quadrante em relação ao eixo y, o novo ponto estará no 3º quadrante.

c) ( ) O ponto $(5,-4)$ é simétrico ao ponto $(5,4)$ em relação ao eixo x.

d) ( ) A simetria em relação à origem altera apenas o sinal da abscissa, mantendo o sinal da ordenada.

Exercício 7. Identifique qual foi o tipo de reflexão geométrica (em relação ao eixo x, ao eixo y ou à origem) aplicada em cada caso para transformar o ponto original no ponto refletido:

a) Do ponto original $P(1,4)$ para o ponto refletido $P'(-1,4)$.

b) Do ponto original $Q(-3,-2)$ para o ponto refletido $Q'(3,2)$.

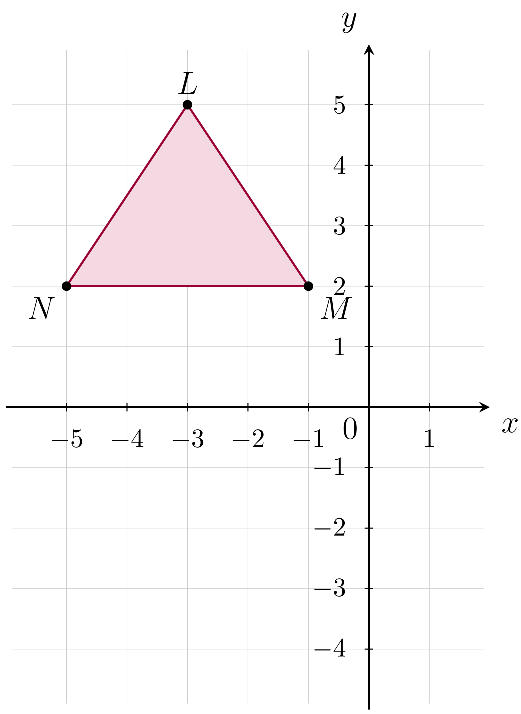
c) Do ponto original $R(7,-5)$ para o ponto refletido $R'(7,5)$.

Exercício 8. Um triângulo possui seus vértices localizados nos pontos $A(1,1)$, $B(4,1)$ e $C(1,5)$. Deseja-se construir um triângulo simétrico a este em relação ao eixo y.

a) Determine as coordenadas dos vértices A', B' e C' do novo triângulo refletido.

b) Indique em qual quadrante o triângulo original e o triângulo refletido estão localizados, respectivamente.

Exercício 9. Observe o triângulo representado no plano cartesiano a seguir. Escreva as coordenadas de seus vértices L, M e N. Em seguida, determine quais seriam as coordenadas dos vértices de um triângulo simétrico a este, caso a reflexão fosse feita em relação ao eixo x.



Exercício 10. Um retângulo $PQRS$ possui seus lados estritamente paralelos aos eixos coordenados do plano cartesiano. Sabe-se que o vértice P está localizado no ponto $(-3,5)$ e que a figura plana formada é perfeitamente simétrica em relação ao eixo das ordenadas (eixo y). Além disso, a altura deste retângulo, medida verticalmente, é de 8 unidades de comprimento, estendendo-se para a região abaixo do eixo x. Com base nessas informações lógicas, resolva os itens a seguir:

a) Sabendo da simetria em relação ao eixo y, determine as coordenadas do vértice Q, que está no mesmo nível horizontal de P e localizado no $1^{\underline{o}}$ quadrante.

b) Utilizando a informação da medida da altura, determine as coordenadas dos vértices R e S, que formam a base inferior do retângulo.

c) Identifique a qual quadrante pertence cada um dos quatro vértices do retângulo $PQRS$.

d) Determine a medida da base deste retângulo e, em seguida, calcule o seu perímetro (a soma de todos os lados), expresso em unidades de comprimento da malha.

Exercício 11. Se $a < 0$ e $b > 0$, os pontos $P(a, -b)$ e $Q(b, -a)$ pertencem, respectivamente, a quais quadrantes?

Resoluções