



Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

Material de Apoio e Lista de Exercícios

Polinômios - I

Professor: Danilo Kanno

Guaratinguetá

1 Polinômios

Monômio ou Termo Algébrico

Um monômio, também denominado termo algébrico, é uma expressão matemática constituída por um número real, por uma variável ou pelo produto entre números e variáveis, nos quais os expoentes das variáveis são números inteiros não negativos.

De maneira geral, um monômio é estruturado em duas partes fundamentais:

- **Coeficiente numérico:** o fator multiplicativo constante (o número real).
- **Parte literal:** o produto das variáveis, acompanhadas de seus respectivos expoentes.

Exemplo 1. No monômio $5x^2y$, identifica-se:

- Coeficiente numérico: 5
- Parte literal: x^2y

Exemplo 2. No monômio $-a^3b^2$, identifica-se:

- Coeficiente numérico: -1 (o sinal negativo indica a multiplicação por -1)
- Parte literal: a^3b^2

Exemplo 3. No termo 7, que representa uma constante numérico-linear, identifica-se:

- Coeficiente numérico: 7
- Parte literal: inexistente (ou considerada como x^0 , visto que $x^0 = 1$)

Monômios Semelhantes

Dois ou mais monômios são classificados como semelhantes quando apresentam exatamente a mesma parte literal, ou seja, as mesmas variáveis com os mesmos expoentes. A variação entre eles ocorre exclusivamente no coeficiente numérico.

Exemplo 4. Os monômios $3x^2y$ e $-8x^2y$ são semelhantes, pois ambos possuem a parte literal x^2y .

Exemplo 5. Os monômios $4xy^2$ e $4x^2y$ **não** são semelhantes. Embora possuam as mesmas variáveis (x e y), os expoentes correspondentes são distintos, o que altera a configuração da parte literal.

Conceito de Polinômio e Grau

Um polinômio é uma expressão algébrica constituída pela soma integrante de dois ou mais monômios não semelhantes. Cada monômio que compõe a estrutura da expressão é denominado **termo** do polinômio.

Caso a expressão apresente monômios semelhantes, deve-se realizar a redução desses termos por meio da soma de seus coeficientes antes de classificar o polinômio.

De acordo com o número de termos não semelhantes, algumas denominações específicas são utilizadas:

- **Binômio:** polinômio que possui exatamente dois termos não semelhantes.
- **Trinômio:** polinômio que possui exatamente três termos não semelhantes.

Para expressões compostas por quatro ou mais termos não semelhantes, utiliza-se o termo geral **polinômio**. Cabe ressaltar que o termo que apresenta apenas o coeficiente numérico, desacompanhado de uma parte literal visível, é denominado **termo independente**.

Exemplo 6. No polinômio $2x^3 - 5x + 7$, identificam-se três termos: $2x^3$, $-5x$ e 7 . Trata-se de um trinômio cujo termo independente é igual a 7 .

Grau de um Polinômio

O grau de um polinômio não nulo, que possui apenas uma variável, é determinado pelo maior expoente que essa variável apresenta em um termo cujo coeficiente numérico seja diferente de zero.

Exemplo 7. Dado o polinômio $P(x) = 4x^5 - 2x^3 + x^2 - 9$, observa-se que o maior expoente da variável x é 5. Portanto, $P(x)$ é um polinômio do quinto grau.

Exemplo 8. No binômio $Q(y) = 3y + 8$, o expoente da variável y é implicitamente igual a 1. Dessa forma, a expressão é classificada como um polinômio do primeiro grau.

Se todos os coeficientes numéricos de um polinômio forem iguais a zero, a expressão reduz-se a zero e recebe o nome de **polinômio nulo**. Ao polinômio nulo não se atribui um grau definido.

Valor Numérico de um Polinômio

O valor numérico de um polinômio corresponde ao resultado obtido ao substituir as variáveis da expressão algébrica por números reais específicos e, em seguida, efetuar as operações matemáticas indicadas.

Para realizar o cálculo com precisão, recomenda-se a utilização de parênteses durante o processo de substituição das variáveis. Tal prática é fundamental, especialmente ao operar com números negativos, para assegurar a correta aplicação das regras de sinais e das propriedades das operações básicas. A ordem de resolução deve respeitar a hierarquia matemática: primeiro efetuam-se as potenciações, seguidas pelas multiplicações e divisões e, por fim, as adições e subtrações.

Exemplo 9. Determinar o valor numérico do polinômio $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$ para $x = 3$.

Substituindo a variável x pelo valor 3:

$$P(3) = 2 \cdot (3)^2 - 3 \cdot (3) + 5$$

$$P(3) = 2 \cdot 9 - 9 + 5$$

$$P(3) = 18 - 9 + 5$$

$$P(3) = 14$$

O valor numérico do polinômio para $x = 3$ é 14.

Exemplo 10. Calcular o valor numérico do binômio $Q(a) = a^3 - 4a$ para $a = -2$.

Substituindo a variável a pelo valor -2 :

$$Q(-2) = (-2)^3 - 4 \cdot (-2)$$

$$Q(-2) = -8 + 8$$

$$Q(-2) = 0$$

O valor numérico do polinômio para $a = -2$ é 0.

Raiz ou Zero de um Polinômio

Um caso particular de grande relevância ocorre quando o cálculo do valor numérico de um polinômio resulta em zero, como observado no exemplo anterior. O número real que, ao ser substituído no lugar da variável, anula a expressão polinomial é denominado **raiz** ou **zero** do polinômio.

Exemplo 11. Verificar se o valor numérico $x = 5$ é raiz do polinômio $M(x) = x^2 - 7x + 10$.

Calcula-se o valor numérico para $x = 5$:

$$M(5) = (5)^2 - 7 \cdot (5) + 10$$

$$M(5) = 25 - 35 + 10$$

$$M(5) = -10 + 10$$

$$M(5) = 0$$

Dado que $M(5) = 0$, afirma-se que o número 5 é uma das raízes do polinômio $M(x)$.

2 Operações e Manipulação Algébrica

Adição e Subtração de Polinômios

A adição e a subtração de polinômios fundamentam-se no princípio da redução de termos semelhantes. O processo consiste em agrupar os monômios que possuem exatamente a mesma parte literal e, em seguida, efetuar as operações aritméticas exclusivamente com os seus respectivos coeficientes numéricos. A parte literal permanece inalterada.

Para realizar essas operações, é frequente a necessidade de eliminar os parênteses que delimitam as expressões algébricas. Neste momento, exige-se rigor na aplicação da regra de sinais:

- Quando um polinômio é precedido por um sinal positivo (+), mantêm-se os sinais originais de todos os seus termos.
- Quando um polinômio é precedido por um sinal negativo (−), invertem-se os sinais de todos os termos contidos no interior dos parênteses.

Exemplo 12. Dados os polinômios $A(x) = 3x^2 - 5x + 2$ e $B(x) = x^2 + 4x - 7$, calcular a soma algébrica $A(x) + B(x)$.

Inicia-se posicionando as expressões e eliminando os parênteses, preservando os sinais do segundo polinômio:

$$(3x^2 - 5x + 2) + (x^2 + 4x - 7)$$

$$3x^2 - 5x + 2 + x^2 + 4x - 7$$

Em seguida, agrupam-se os termos semelhantes e reduzem-se os coeficientes:

$$(3x^2 + x^2) + (-5x + 4x) + (2 - 7)$$

$$4x^2 - 1x - 5$$

Portanto, a soma resulta no polinômio $4x^2 - x - 5$.

Exemplo 13. Considerando os mesmos polinômios $A(x)$ e $B(x)$ do exemplo anterior,

calcular a diferença $A(x) - B(x)$.

Ao estruturar a operação, o sinal negativo antes de $B(x)$ determina a alteração do sinal de todos os termos que o compõem:

$$(3x^2 - 5x + 2) - (x^2 + 4x - 7)$$

$$3x^2 - 5x + 2 - x^2 - 4x + 7$$

Agrupam-se novamente os termos semelhantes:

$$(3x^2 - x^2) + (-5x - 4x) + (2 + 7)$$

$$2x^2 - 9x + 9$$

Portanto, a diferença resulta no polinômio $2x^2 - 9x + 9$.

3 Produtos Notáveis

Na manipulação de expressões algébricas, certas multiplicações de polinômios ocorrem com extrema frequência. Esses casos específicos recebem a denominação de **produtos notáveis**. O domínio de suas estruturas permite a obtenção do resultado de forma direta e otimizada, estabelecendo uma forte conexão com o cálculo geométrico de áreas.

A seguir, apresentam-se os três casos fundamentais para a manipulação algébrica:

Quadrado da Soma de Dois Termos

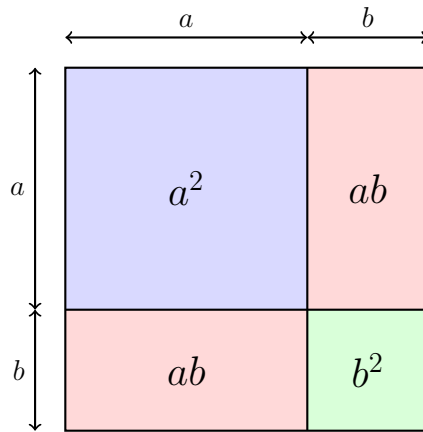
O quadrado da soma de dois termos é equivalente ao quadrado do primeiro termo, adicionado ao dobro do produto do primeiro termo pelo segundo, e adicionado ao quadrado do segundo termo.

Genericamente, a relação expressa-se como:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Interpretação Geométrica: Considere um quadrado cujo lado mede $(a + b)$. A área total deste quadrado, dada por $(a + b)^2$, pode ser decomposta em quatro regiões menores:

- Um quadrado de lado a (área a^2);
- Um quadrado de lado b (área b^2);
- Dois retângulos de lados a e b (cada um com área ab).



A soma dessas áreas compõe a área total, confirmando a identidade $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Exemplo 14. Desenvolver o produto notável $(x + 5)^2$.

Aplicando a regra estabelecida:

- Primeiro termo: x
- Segundo termo: 5

$$(x + 5)^2 = (x)^2 + 2 \cdot (x) \cdot (5) + (5)^2$$

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

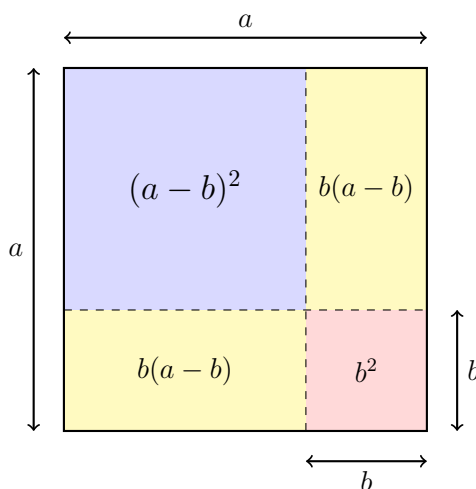
Quadrado da Diferença de Dois Termos

De forma análoga à soma, o quadrado da diferença de dois termos é equivalente ao quadrado do primeiro termo, subtraído do dobro do produto do primeiro termo pelo segundo, e adicionado ao quadrado do segundo termo.

Genericamente, a relação expressa-se como:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Interpretação Geométrica: Para obter a área de um quadrado de lado $(a - b)$, parte-se de um quadrado maior de lado a (área a^2). Subtraem-se dois retângulos de dimensões $a \times b$. Contudo, ao realizar essa subtração, a região correspondente ao quadrado de lado b (área b^2) é subtraída duas vezes. Para corrigir essa sobreposição, deve-se somar a área b^2 uma vez.



Logo, a área desejada é $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Exemplo 15. Desenvolver o produto notável $(3y - 2)^2$.

Aplicando a regra estabelecida:

- Primeiro termo: $3y$
- Segundo termo: 2

$$(3y - 2)^2 = (3y)^2 - 2 \cdot (3y) \cdot (2) + (2)^2$$

$$(3y - 2)^2 = 9y^2 - 12y + 4$$

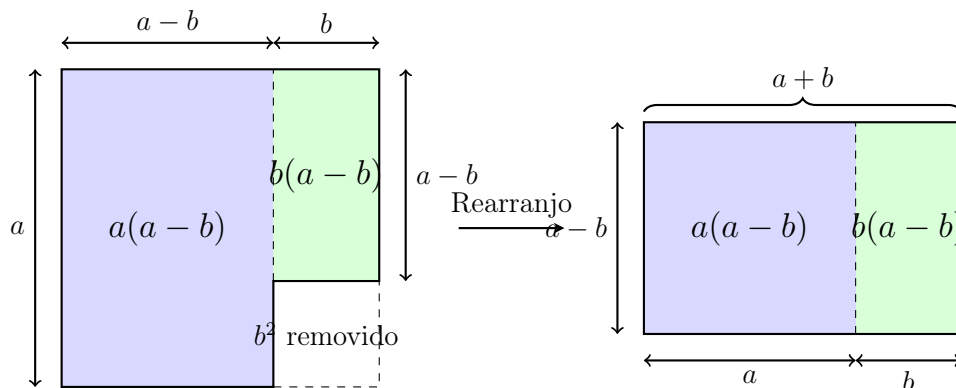
Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos

A multiplicação da soma de dois termos pela sua respectiva diferença é equivalente ao quadrado do primeiro termo subtraído do quadrado do segundo termo.

Genericamente, a relação expressa-se como:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Interpretação Geométrica: Considere um quadrado de área a^2 , do qual recorta-se um quadrado menor de área b^2 . A figura resultante, em formato de "L", possui área equivalente a $a^2 - b^2$. Esta figura pode ser decomposta em dois retângulos menores que, ao serem rearranjados, formam um único retângulo de base $(a + b)$ e altura $(a - b)$.



A área do novo retângulo formado é justamente a base multiplicada pela altura, comprovando que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Exemplo 16. Desenvolver o produto $(m + 7) \cdot (m - 7)$.

Identificando o padrão da soma pela diferença:

- Primeiro termo: m
- Segundo termo: 7

$$(m + 7) \cdot (m - 7) = (m)^2 - (7)^2$$

$$(m + 7) \cdot (m - 7) = m^2 - 49$$

Fatoração de Polinômios

A fatoração de uma expressão algébrica consiste no processo de transformá-la em uma multiplicação de fatores polinomiais mais simples. Trata-se, essencialmente, da operação inversa da multiplicação de polinômios e do desenvolvimento dos produtos notáveis.

A seguir, são apresentados os principais métodos de fatoração:

Fator Comum em Evidência

Este método é aplicado quando todos os termos de um polinômio possuem um fator em comum, seja ele numérico (divisor comum máximo) ou literal (variável comum com o menor expoente). O fator comum é isolado, multiplicando o polinômio resultante da divisão de cada termo original por esse mesmo fator.

Exemplo 17. Fatorar o polinômio $12x^3 - 8x^2 + 4x$.

Identifica-se o fator comum:

- Nos coeficientes $(12, -8, 4)$: o maior divisor comum é 4.
- Na parte literal (x^3, x^2, x) : a variável comum com o menor expoente é x .

Logo, o fator comum é $4x$. Colocando-o em evidência:

$$12x^3 - 8x^2 + 4x = 4x \cdot (3x^2 - 2x + 1)$$

Agrupamento

O método do agrupamento é uma extensão do fator comum, geralmente aplicado em polinômios com quatro ou mais termos que não apresentam um fator comum a todos eles simultaneamente. O processo envolve agrupar os termos em subgrupos que possuam fatores comuns, realizando a colocação em evidência de forma sucessiva.

Exemplo 18. Fatorar o polinômio $ax + ay + bx + by$.

Agrupam-se os termos de dois em dois:

$$(ax + ay) + (bx + by)$$

Coloca-se o fator comum em evidência em cada subgrupo:

$$a(x + y) + b(x + y)$$

Nota-se que o binômio $(x + y)$ constitui agora um novo fator comum. Colocando-o novamente em evidência, obtém-se a forma fatorada final:

$$(x + y) \cdot (a + b)$$

Diferença de Dois Quadrados

Este caso corresponde à operação inversa do produto da soma pela diferença de dois termos. A diferença entre dois termos elevados ao quadrado pode ser fatorada como o produto da soma das bases pela diferença de suas bases.

A estrutura algébrica é dada por:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Exemplo 19. Fatorar o binômio $25x^2 - 16$.

Extraem-se as raízes quadradas de ambos os termos para identificar as bases:

- $\sqrt{25x^2} = 5x$
- $\sqrt{16} = 4$

Aplicando a regra estabelecida:

$$25x^2 - 16 = (5x + 4) \cdot (5x - 4)$$

Trinômio Quadrado Perfeito

Este caso representa a operação inversa do quadrado da soma ou do quadrado da diferença. Um trinômio é classificado como quadrado perfeito quando dois de seus termos são quadrados exatos e positivos, e o termo restante é rigorosamente igual ao dobro do produto das raízes quadradas desses dois termos.

As estruturas algébricas correspondentes são:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Exemplo 20. Fatorar o trinômio $x^2 + 14x + 49$.

Verifica-se a condição de trinômio quadrado perfeito:

- Raiz do primeiro termo: $\sqrt{x^2} = x$
- Raiz do terceiro termo: $\sqrt{49} = 7$
- Dobro do produto das raízes: $2 \cdot x \cdot 7 = 14x$ (coincide exatamente com o termo central).

Considerando que o sinal do termo central é positivo, trata-se do quadrado de uma soma:

$$x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$$

4 Exercícios Resolvidos

A compreensão profunda das operações com polinômios e dos produtos notáveis permite a resolução otimizada de problemas que, de outra forma, demandariam cálculos exaustivos. A seguir, apresentam-se algumas aplicações práticas desses conceitos.

Problema Resolvido 1. Sabendo-se que a soma de dois números reais a e b é igual a 8 e que o produto entre eles é igual a 15, determine o valor numérico da expressão algébrica $a^2 + b^2$.

Resolução: A princípio, poder-se-ia tentar descobrir os valores isolados de a e b . Contudo, o uso dos produtos notáveis permite encontrar a resposta de forma direta. Parte-se da expressão do quadrado da soma:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Substituem-se as informações fornecidas no enunciado ($a + b = 8$ e $ab = 15$):

$$(8)^2 = a^2 + 2 \cdot (15) + b^2$$

$$64 = a^2 + 30 + b^2$$

Isolando os termos ao quadrado, obtém-se:

$$a^2 + b^2 = 64 - 30$$

$$a^2 + b^2 = 34$$

Portanto, o valor numérico da expressão $a^2 + b^2$ é 34.

Problema Resolvido 2. Calcule, de forma otimizada e sem a realização de extensos algoritmos de multiplicação, o valor da expressão numérica $2026^2 - 2025^2$.

Resolução: A expressão apresenta a estrutura exata da diferença de dois quadrados ($a^2 - b^2$). Aplica-se, portanto, a fatoração como o produto da soma pela diferença:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Considerando $a = 2026$ e $b = 2025$, tem-se:

$$2026^2 - 2025^2 = (2026 + 2025) \cdot (2026 - 2025)$$

Efetuando as operações no interior dos parênteses:

$$2026^2 - 2025^2 = (4051) \cdot (1)$$

$$2026^2 - 2025^2 = 4051$$

Dessa forma, a fatoração reduziu um cálculo aritmético complexo a uma simples adição.

Problema Resolvido 3. Simplifique a fração algébrica a seguir, sabendo que $x \neq 3$ e $x \neq -3$:

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$$

Resolução: A simplificação de frações algébricas exige a fatoração prévia tanto do numerador quanto do denominador.

- **Numerador** ($x^2 - 6x + 9$): Trata-se de um trinômio quadrado perfeito. As raízes dos extremos são x e 3 , e o termo central negativo é o dobro do produto entre eles ($-2 \cdot x \cdot 3 = -6x$). Logo, fatora-se como $(x - 3)^2$.
- **Denominador** ($x^2 - 9$): Trata-se de uma diferença de dois quadrados ($x^2 - 3^2$). Fatora-se como $(x + 3) \cdot (x - 3)$.

Substituindo as formas fatoradas na fração original:

$$\frac{(x - 3)^2}{(x + 3) \cdot (x - 3)}$$

Que pode ser reescrita expandindo o numerador para evidenciar o corte:

$$\frac{(x - 3) \cdot (x - 3)}{(x + 3) \cdot (x - 3)}$$

Cancelando o fator comum $(x - 3)$ presente no numerador e no denominador, chega-se à forma simplificada:

$$\frac{x - 3}{x + 3}$$

5 Exercícios

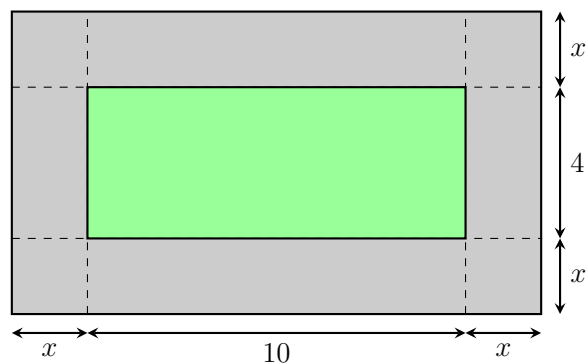
Exercício 1. Eu tinha um terreno quadrado medindo y metros de lado. Comprei mais 3 m de frente e 2 m de fundos.

- Faça a representação geométrica correspondente ao novo terreno.
- Quantos metros a frente do terreno passará a ter?
- Quantos metros o fundo do terreno passará a ter?
- Qual a expressão da área do novo terreno na forma desenvolvida?
- Qual é a expressão do perímetro do novo terreno na forma desenvolvida?

Exercício 2. Se um sanduíche custa s reais e um refrigerante custa r reais, indique o custo, em reais, de:

- Dois sanduíches
- Sete refrigerantes
- Um sanduíche e três refrigerantes
- Cinco sanduíches e um refrigerante

Exercício 3. Ao redor do jardim da casa de Geometrino, vai ser construída uma calçada revestida de pedra. As medidas estão em metros.



- Qual é a área ocupada pelo jardim?
- Escreva, na forma desenvolvida, um polinômio que expresse a área ocupada pela calçada.

Exercício 4. Calcule os seguintes produtos notáveis:

- | | |
|-----------------------|--|
| a) $(x + 1)^2$ | i) $(x^4 + 3^2)^2$ |
| b) $(4 + x)^2$ | j) $(-a - b)^2$ |
| c) $(x + \sqrt{3})^2$ | k) $(-2a + b)^2$ |
| d) $(3x + 1)^2$ | l) $(2a - 2b)^2$ |
| e) $(4x + 2)^2$ | m) $(x - 1)(x + 1)$ |
| f) $(2x + 3)^2$ | n) $(4 - a)(4 + a)$ |
| g) $(x^2 + 3)^2$ | o) $(x^2 - 3z)(x^2 + 3z)$ |
| h) $(a^2 + 3b^2)^2$ | p) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + y)$ |

Exercício 5. Reduza os termos semelhantes nas expressões algébricas e classifique a expressão reduzida em monômio, binômio e trinômio.

- a) $5xy^2 + 7x^3 + 9y^2x - 9x^3 + y^2x + 2x^3$
- b) $-7a^2b + (-5a) + 7ab^2 - (-3a)$
- c) $8 - 9m + 7mp + 13m - 16mp + 7$
- d) $4xy^2 - 7x^2y - xy^2 + 2xy^2 - 3x^2y$

Exercício 6. Reduza os termos semelhantes efetuando as operações indicadas

- a) $(x^2 + 3) + (-x + 2) - (x^2 - 1) + (-7x^2 + 2x - 2)$
- b) $(x + 4) - (x - 2) + (4x - 5) - (7x + 10)$
- c) $2x - (y + 1 - 3x) - (2xy + 7y - 2) + (-5y + 7x + 2xy)$

Exercício 7. Efetue os produtos a seguir:

- a) $-3x \cdot 2y \cdot 4x^2$
- b) $3x \cdot (x + 2) \cdot (x - 1)$
- c) $(x + 2y - 3) \cdot (2 + y - 3x)$

Exercício 8. Fatore por agrupamento as seguintes expressões:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| a) $a^2 + ab + ac + bc$ | d) $ax - bx + 2a - 2b$ |
| b) $ax - bx + ay - by$ | e) $10ab - 2b + 15a - 3$ |
| c) $2ab + 2a + b + 1$ | |

Exercício 9. Simplifique as frações fatorando o denominador e o numerador:

- | | |
|--|--|
| a) $\frac{3a + 5b}{6a + 10b}$ | e) $\frac{x^4 + x^3}{x^2 + x}$ |
| b) $\frac{3x + 3y}{8x + 8y}$ | f) $\frac{m^4 + m^2}{m^2 + 1}$ |
| c) $\frac{3a^2 + 5a}{6a + 10}$ | g) $\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + x^2}$ |
| d) $\frac{a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y)}{(a - b) \cdot x + (a - b) \cdot y}$ | h) $\frac{m^4 + 3m^3 + 2m + 6}{(m + 3)^2}$ |

Exercício 10. Fatore as expressões abaixo usando a diferença de quadrados:

- | | |
|------------------|----------------------|
| a) $a^2 - 25b^2$ | d) $a^2x^2 - b^2y^2$ |
| b) $4^2 - 1$ | e) $a^4 - b^4$ |
| c) $7 - x^2$ | |

Exercício 11. Para cada um dos itens abaixo decida se a expressão dada é o quadrado de um binômio, isto é, se pode ser escrita da forma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ou como $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Em caso afirmativo, escreva o binômio.

- | | |
|----------------------------|-------------------------|
| a) $x^2 - 4x + 3$ | d) $4z^2 - 12zy + 9y^2$ |
| b) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ | e) $3z^2 + 6z + 3$ |
| c) $y^2 + 6y + 18$ | |

Exercício 12. Fatore $p^4 - 1$.

Exercício 13. Fatore as expressões:

- a) $a^2b - b^3$
 b) $x^2 - 2xy + y^2 - 9$
 c) $a^4 - 32a^2 + 256$

Exercício 14. Calcule o valor do número:

$$20142013^2 - 2 \cdot (20142013) \cdot (20142012) + 20142012^2$$

Exercício 15. Sejam:

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$B = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

Calcule $A \cdot B$.

Resoluções

