



Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

# Material de Apoio e Lista de Exercícios

## Potenciação

Professor: Danilo Kanno

Guaratinguetá

# 1 Introdução à Potenciação

A potenciação é uma operação matemática fundamental que surge da necessidade de expressar produtos de fatores iguais de maneira sintética e eficiente. Mais do que uma simples abreviação da multiplicação, ela constitui a base para o estudo de funções exponenciais, logaritmos e notação científica, ferramentas indispensáveis nas ciências exatas.

Formalmente, dado um número real  $a$  e um número natural  $n$ , com  $n > 1$ , a potência  $a^n$  representa a multiplicação de  $a$  por ele mesmo  $n$  vezes.

## 1.1 Evolução Histórica e Notação

A notação matemática que utilizamos hoje é fruto de um longo processo de evolução histórica. A manipulação de potências remonta à antiguidade:

- **Babilônia (c. 1800 a.C.):** Escavações arqueológicas revelaram tábuas de argila contendo listas de quadrados e cubos de números, utilizadas para agilizar cálculos astronômicos e agrimensura.
- **Grécia Antiga (c. 250 a.C.):** O matemático Arquimedes, em sua obra *O Arenário* (ou *O Contador de Areia*), desenvolveu um sistema numérico precursor da notação de potências para estimar quantos grãos de areia seriam necessários para preencher o universo conhecido na época. Arquimedes demonstrou, pela primeira vez, a necessidade de uma notação capaz de manipular grandezas astronômicas.
- **A Consolidação Cartesiana (1637):** Durante séculos, a representação algébrica foi retórica ou sincopada. A notação moderna,  $a^n$ , foi introduzida e padronizada pelo matemático francês René Descartes em sua obra *La Géométrie*. Descartes estabeleceu o uso de expoentes numéricos sobrescritos, simplificando drasticamente a escrita de polinômios e equações algébricas.

## 1.2 Contextualização e Aplicações

A compreensão da potenciação é pré-requisito para a leitura quantitativa da realidade, especialmente em fenômenos que não seguem um padrão de crescimento linear (aditivo),

mas sim exponencial (multiplicativo).

### 1.2.1 Ciências Naturais e Crescimento Populacional

Fenômenos biológicos, como a mitose celular ou a propagação de patógenos, são modelados por funções exponenciais. Se uma cultura de bactérias dobra a cada período de tempo, sua população  $P$  após  $t$  períodos é descrita por  $P = P_0 \cdot 2^t$ . Sem o domínio da potenciação, a previsão e o controle desses fenômenos tornam-se inviáveis.

### 1.2.2 Tecnologia da Informação

A arquitetura computacional moderna baseia-se no sistema binário. As unidades de medida de armazenamento e processamento (como Kilobyte, Megabyte, Gigabyte) não seguem a base 10 estrita do Sistema Internacional, mas sim potências de base 2. Por exemplo:

$$1 \text{ Kilobyte (KB)} = 2^{10} \text{ bytes} = 1.024 \text{ bytes}$$

Essa estrutura permeia toda a lógica de programação e hardware.

### 1.2.3 Escalas de Magnitude

Diversas escalas científicas utilizam potências (e seus inversos, os logaritmos) para medir intensidades que variam enormemente:

- **Escala Richter:** Utilizada para medir a magnitude de terremotos.
- **Potencial Hidrogeniônico (pH):** Mede a acidez ou alcalinidade de uma solução baseando-se na concentração de íons de hidrogênio (potências de 10 negativas).

O estudo que se inicia neste capítulo visa, portanto, instrumentalizar o aluno para manipular essas grandezas com precisão e rigor matemático.

### Curiosidade: A Lenda do Xadrez

Conta a lenda que o criador do jogo de xadrez pediu ao rei, como recompensa, grãos de trigo. Ele pediu 1 grão para a primeira casa do tabuleiro, 2 para a segunda, 4 para a terceira, 8 para a quarta, e assim sucessivamente, sempre dobrando a quantidade ( $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{63}$ ).

O rei riu, achando pouco. Mas, ao fazer as contas, descobriu que a quantidade total de grãos seria tão grande que não haveria trigo suficiente em todo o planeta para pagar a dívida! Isso demonstra o poder explosivo do crescimento exponencial.

### Curiosidade: O Limite da Dobra

Se você pegar uma folha de papel comum (espessura aproximada de 0,1 mm) e dobrá-la ao meio sucessivamente, a espessura crescerá exponencialmente ( $2^n$ ).

- Com apenas **7 dobras**, a espessura já é igual à de um caderno de 128 páginas.
- Com **42 dobras**, a pilha de papel atingiria a Lua (distância média de 384.400 km).
- Com **103 dobras**, a espessura seria maior que o diâmetro do Universo observável (cerca de 93 bilhões de anos-luz).

Este experimento mental demonstra como a intuição linear humana falha ao tentar compreender a magnitude da função exponencial  $f(x) = 2^x$ .

## 2 Propriedades Operatórias da Potenciação

O domínio das propriedades da potenciação é indispensável para a simplificação de expressões algébricas e para a resolução de equações exponenciais. As propriedades a seguir são válidas para bases no conjunto dos números reais ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) e expoentes no conjunto dos números inteiros ( $m, n \in \mathbb{Z}$ ), respeitadas as condições de existência (denominadores não nulos).

### 2.1 Propriedades Fundamentais

#### a) Produto de Potências de Mesma Base

Ao multiplicar potências que possuem a mesma base, conserva-se a base e adicionam-se os expoentes. A justificativa reside na aditividade da contagem de fatores.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

**Exemplo:**  $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

#### b) Quociente de Potências de Mesma Base

Para a divisão de potências de mesma base (com  $a \neq 0$ ), conserva-se a base e subtraem-se os expoentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

**Exemplo:**  $\frac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^2 = 25$

#### c) Potência de Potência

Ao elevar uma potência a um novo expoente, conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

**Exemplo:**  $(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$

*Nota: É fundamental distinguir  $(a^m)^n$  de  $a^{m^n}$ . No primeiro caso, multiplicam-se os expoentes; no segundo, calcula-se a potência do expoente. Exemplo:  $2^{3^2} = 2^9 = 512$ , enquanto  $(2^3)^2 = 2^6 = 64$ .*

#### d) Potência de um Produto ou Quociente (Distributividade)

A potenciação é distributiva em relação à multiplicação e à divisão (mas nunca em relação à soma ou subtração).

**Para o produto:**

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

**Exemplo:**  $(2 \cdot 4)^3 = 2^3 \cdot 4^3 = 8 \cdot 64 = 512$

**Para o quociente:**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{com } b \neq 0$$

**Exemplo:**  $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

### 2.2 Definições Complementares

Para garantir a consistência aritmética das propriedades acima, estabelecem-se as seguintes definições para expoentes nulos e negativos:

- **Expoente Nulo:** Para todo número real  $a \neq 0$ , define-se:

$$a^0 = 1$$

**Exemplos:**  $7^0 = 1$ ;  $(-15)^0 = 1$ ;  $(\pi)^0 = 1$ .

*Justificativa formal:* Pela propriedade do quociente,  $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ . Como um número dividido por ele mesmo é 1, conclui-se que  $a^0 = 1$ .

- **Expoente Negativo:** Para todo número real  $a \neq 0$  e  $n$  inteiro, define-se a potência de expoente negativo como o inverso da base elevado ao expoente positivo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

**Exemplo:**  $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ . Outro caso:  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ .

## 3 Casos Especiais e Pontos de Atenção

A manipulação algébrica de potências exige rigorosa atenção aos sinais e à prioridade das operações. Abaixo, detalham-se situações onde erros de interpretação são frequentes.

### 3.1 Potências de Base Negativa

Quando a base de uma potência é um número negativo, o sinal do resultado depende da paridade do expoente. Considerando um número real  $a > 0$ :

- **Expoente Par:** O resultado será sempre positivo.

$$(-a)^{\text{par}} = +a^{\text{par}}$$

**Exemplo:**  $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$

- **Expoente Ímpar:** O resultado conservará o sinal negativo da base.

$$(-a)^{\text{ímpar}} = -a^{\text{ímpar}}$$

**Exemplo:**  $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

### 3.2 A Importância dos Parênteses

Na notação matemática, a ausência de parênteses altera a ordem de precedência das operações. A potenciação tem prioridade sobre a negação (sinal de menos). Portanto:

- a) **Com Parênteses:** O sinal faz parte da base e é elevado ao expoente.

$$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$$

- b) **Sem Parênteses:** Apenas o número é elevado ao expoente; o sinal negativo é aplicado ao resultado final.

$$-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$$

**Conclusão:** Em geral,  $(-a)^n \neq -a^n$  (exceto quando  $n$  é ímpar, onde os valores coincidem, mas a lógica operatória difere).

### 3.3 Erro Comum: Distributividade na Soma

Uma falha conceitual grave é tentar aplicar a propriedade distributiva da potenciação em somas ou subtrações. A potenciação **não** é distributiva em relação à adição.

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n$$

**Demonstração numérica:** Considere  $a = 3$  e  $b = 4$ .

- Correto:  $(3 + 4)^2 = 7^2 = 49$
- Incorreto:  $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

Como  $49 \neq 25$ , prova-se que a igualdade não se sustenta. Para expandir expressões como  $(a + b)^2$ , deve-se utilizar os Produtos Notáveis.

# 4 Potências de Base 10

As potências de base 10 possuem um comportamento padrão que facilita a representação de números muito grandes ou muito pequenos. O expoente indica diretamente a quantidade de zeros ou casas decimais.

## 4.1 Expoentes Positivos

O expoente indica a quantidade de zeros à direita do algarismo 1.

- $10^1 = 10$  (1 zero)
- $10^2 = 100$  (2 zeros)
- $10^6 = 1.000.000$  (6 zeros)
- $10^n = 1 \underbrace{000 \dots 0}_{n \text{ zeros}}$

## 4.2 Expoentes Negativos

O módulo do expoente indica a quantidade de **casas decimais** (algarismos à direita da vírgula). O algarismo 1 ocupará a última posição.

- $10^{-1} = 0,1$  (1 casa decimal)
- $10^{-2} = 0,01$  (2 casas decimais)
- $10^{-3} = 0,001$  (3 casas decimais)
- $10^{-n} = 0, \underbrace{00 \dots 01}_{n \text{ casas decimais}}$

## Resumo do Módulo

Para consulta rápida durante a resolução dos exercícios, utilize o quadro abaixo:

Propriedade	Fórmula Geral	Exemplo
Produto (mesma base)	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^2 = 2^5$
Divisão (mesma base)	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^2} = 3^3$
Potência de Potência	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(5^2)^3 = 5^6$
Produto Elevado	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2x)^2 = 4x^2$
Expoente Zero	$a^0 = 1, (a \neq 0)$	$125^0 = 1$
Expoente Negativo	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
Base Negativa (Exp. Par)	$(-a)^{\text{par}} = +$	$(-2)^2 = 4$
Base Negativa (Exp. Ímpar)	$(-a)^{\text{ímpar}} = -$	$(-2)^3 = -8$

## 5 Exercícios

**Exercício 1.** Calcule o valor de:

- |                       |                       |                         |                       |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| a) $7^2$              | f) $(-\frac{3}{2})^3$ | k) $2^{-6}$             | p) $27^{\frac{1}{3}}$ |
| b) $9^0$              | g) $1,9^2$            | l) $(\frac{2}{3})^{-3}$ | q) $64^{0,5}$         |
| c) $-10^6$            | h) $20^{-1}$          | m) $(\frac{1}{3})^{-4}$ | r) $(2^3)^2$          |
| d) $(-0,3)^4$         | i) $(-6)^{-1}$        | n) $(\frac{4}{3})^{-2}$ | s) $3^{2^3}$          |
| e) $(-\frac{3}{2})^2$ | j) $11^{-2}$          | o) $9^{\frac{1}{2}}$    | t) $(2+3)^3$          |

**Exercício 2.** Determine o valor de

$$y = \frac{(-5)^2 - 4^2 + (\frac{1}{5})^0}{3^{-2} + 1}$$

**Exercício 3.** Aplicando as propriedades da potenciação, transforme em uma única potência:

- |  |  |
|--|--|
| a) $[(\frac{3}{4})^3]^3$                     | f) $(0,6)^{10} : (0,6)^7$              |
| b) $(\frac{7}{9})^{20} : (\frac{7}{9})^{15}$ | g) $7^{10} \cdot 7^{12}$               |
| c) $(0,9)^8 \cdot (0,9) \cdot (0,9)^3$       | h) $(-6)^3 \cdot (-6)^{15}$            |
| d) $(x^{10})^3$                              | i) $(-2)^{15} \cdot (-2) \cdot (-2)^9$ |
| e) $[(1,7)^{10}]^4$                          | j) $[(-2)^{11}]2$                      |

**Exercício 4.** Sendo  $x = (2^2)^3$ ,  $y = 2^{2^3}$  e  $z = 2^{3^2}$ , o valor de  $x \cdot y \cdot z$  é?

**Exercício 5.** Resolva as expressões:

- |  |                      |
|--|----------------------|
| a) $16^{\frac{5}{4}} + 16^{\frac{3}{4}}$ | b) $256^{-(2^{-2})}$ |
|--|----------------------|

**Exercício 6.** Classifique como verdadeiro ou falso:

- |                                      |                              |
|--------------------------------------|------------------------------|
| a) ( ) $2^7 \cdot 2^2 = 2^9$         | d) ( ) $(7^3)^2 = 7^5$       |
| b) ( ) $2^{3^2} = (2^3)^2$           | e) ( ) $(5+2)^2 = 5^2 + 2^2$ |
| c) ( ) $\frac{10^3}{10^5} = 10^{-2}$ |                              |

**Exercício 7.** Sendo  $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 7$  e  $b = 2^5 \cdot 3^6$ , o quociente de  $a$  por  $b$  é igual a:

**Exercício 8.** Um número expresso por  $(2^6 : 2^4) + 2^2$ . Como esse número pode ser expresso da sua forma mais simplificada?

**Exercício 9.** Se  $x = 3^6$  e  $y = 9^3$ , classifique como verdadeiro ou falso:

a)   $x$  é o dobro de  $y$

c)   $x = y$

b)   $x - y = 1$

d)   $y$  é o triplo de  $x$

**Exercício 10.** Qual é o número decimal expresso por  $[(0,4)^2]^{10} : [(0,4)^9 \cdot (0,4)^7 \cdot 0,4]$ ?

**Exercício 11.** Sabe-se que  $x = 2^{10}$  e  $y = 2^6$ . Nessas condições, calcule o valor do quociente  $x^2 : y^3$

**Exercício 12.** Que potência deve ser colocada no lugar do símbolo \* para que se tenha  $(x^3 \cdot x^4 \cdot x^*)^2 = x^{28}$  ?

**Exercício 13.** Escreva na forma mais simples a expressão  $(a \cdot b \cdot c)^5 \cdot (a \cdot b)^3 \cdot c^2$

**Exercício 14.** Sabendo que  $a = 2^{-4}$  e  $b = 4^{-2}$ , calcule o valor de

a)  $a + b$

b)  $a : b$

**Exercício 15.** Determine o valor de cada uma das seguintes expressões, usando as propriedades da potenciação:

a)  $(10^{50} : 10^{31}) : (10^4)$

b)  $(2^{11} \cdot 2^{17} \cdot 2^{22}) : (2^{20} : 2^{25})$

**Exercício 16.** Escreva na forma mais simples a expressão  $2^3 \cdot (2 \cdot 11)^2 \cdot (2 \cdot 11)^5$

## Resoluções

