



Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

Material de Apoio e Lista de Exercícios

Probabilidade

Professor: Danilo Kanno

Guaratinguetá

1 Introdução teórica

A teoria das probabilidades é o ramo da Matemática responsável por estudar e quantificar as chances de ocorrência de resultados em fenômenos aleatórios. Seu estudo é fundamental para a tomada de decisões em situações de incerteza.

1.1 Conceitos Fundamentais

Para o estudo das probabilidades, é necessário definir três conceitos essenciais:

- **Experimento Aleatório:** É qualquer fenômeno ou experimento que, mesmo repetido diversas vezes sob as mesmas condições, pode apresentar resultados diferentes e imprevisíveis. Exemplos clássicos incluem o lançamento de um dado, o sorteio de uma carta de baralho ou o lançamento de uma moeda.
- **Espaço Amostral (Ω):** É o conjunto formado por *todos* os resultados possíveis de um experimento aleatório. O número total de elementos desse conjunto é representado por $n(\Omega)$.
- **Evento (E):** É qualquer subconjunto do espaço amostral. Trata-se do resultado (ou conjunto de resultados) específico que se deseja analisar. O número de elementos de um evento é representado por $n(E)$.

Exemplo 1. Considere o experimento aleatório “lançamento de um dado honesto de seis faces”.

- O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, portanto, $n(\Omega) = 6$.
- Se o interesse for no evento A , definido como “obter um número par”, o conjunto será $A = \{2, 4, 6\}$ e, conseqüentemente, $n(A) = 3$.

1.2 O Cálculo da Probabilidade

Em espaços amostrais equiprováveis (onde todos os resultados têm a mesma chance de ocorrer), a probabilidade de um evento E acontecer, indicada por $P(E)$, é dada pela

razão entre o número de casos favoráveis (elementos do evento) e o número total de casos possíveis (elementos do espaço amostral).

Fórmula da Probabilidade

$$P(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

A probabilidade sempre será um valor numérico entre 0 e 1. Pode ser representada na forma de fração, número decimal ou porcentagem.

- Se $P(E) = 0$, o evento é chamado de **evento impossível**.
- Se $P(E) = 1$ (ou 100%), o evento é chamado de **evento certo**.

Exemplo 2. Em uma urna há 10 bolas numeradas de 1 a 10. Ao sortear uma bola ao acaso, qual a probabilidade de ela ser um número múltiplo de 3?

Resolução: O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, logo $n(\Omega) = 10$.

O evento E (múltiplos de 3) é $E = \{3, 6, 9\}$, logo $n(E) = 3$.

A probabilidade será:

$$P(E) = \frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$$

1.3 Probabilidade do Evento Complementar

Muitas vezes, é mais simples calcular a probabilidade de um evento *não* ocorrer. Chama-se de evento complementar (representado por E^c ou $\overline{E}$) o conjunto de resultados que não pertencem ao evento E .

A soma das probabilidades de um evento ocorrer e de ele não ocorrer é sempre igual a 1 (ou 100%).

$$P(E) + P(E^c) = 1 \quad \text{ou} \quad P(E^c) = 1 - P(E)$$

Exemplo 3. Se a probabilidade de chover amanhã é de 20%, a probabilidade de *não*

chover é o seu complementar:

$$P(\text{não chover}) = 100\% - 20\% = 80\%$$

1.4 Eventos Sucessivos e o Princípio Multiplicativo

Quando um experimento envolve a ocorrência de dois ou mais eventos sucessivos e independentes (ou seja, o resultado de um não interfere no resultado do outro), a probabilidade de ambos ocorrerem é o **produto** das probabilidades de cada evento separadamente.

Em probabilidade, a conjunção “**E**” (ocorrência simultânea ou em sequência) está diretamente associada à multiplicação.

Exemplo 4. Qual é a probabilidade de, ao lançar uma moeda e um dado, obter-se “cara” na moeda e um número maior que 4 no dado?

Resolução:

- Probabilidade de sair “cara” na moeda: $P(A) = \frac{1}{2}$
- Probabilidade de sair maior que 4 (ou seja, 5 ou 6) no dado: $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

A probabilidade de ocorrerem os dois resultados é:

$$P(A \text{ e } B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

2 Exercícios Resolvidos

Exercício 1. Um estojo contém exatamente 4 canetas azuis, 3 vermelhas e 1 preta, todas de mesmo formato e tamanho. Retirando-se uma caneta ao acaso, qual a probabilidade de a caneta sorteada **não** ser azul?

Resolução: O primeiro passo é determinar o número total de elementos do espaço amostral (Ω), ou seja, o total de canetas no estojo:

$$n(\Omega) = 4 \text{ (azuis)} + 3 \text{ (vermelhas)} + 1 \text{ (preta)} = 8 \text{ canetas}$$

Deseja-se o evento complementar ao evento “retirar uma caneta azul”. Existem duas formas de resolver:

- **Método 1 (Contagem direta):** As canetas que não são azuis são as vermelhas e a preta. Logo, o evento E possui $n(E) = 3 + 1 = 4$ casos favoráveis. A probabilidade é:

$$P(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

- **Método 2 (Evento complementar):** A probabilidade de tirar uma caneta azul é $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. A probabilidade de *não* tirar azul é o complementar:

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Exercício 2. Em uma turma de 8º ano com 30 alunos, 18 são meninas e 12 são meninos. Sabe-se que 10 meninas e 5 meninos usam óculos. Sorteando-se um aluno ao acaso, qual a probabilidade de o sorteado ser um menino que **não** usa óculos?

Resolução: O espaço amostral total é o número de alunos na sala, logo $n(\Omega) = 30$. O evento E corresponde aos “meninos que não usam óculos”. O enunciado informa que há 12 meninos no total e que 5 deles usam óculos. Portanto, o número de meninos que *não* usam óculos é:

$$n(E) = 12 - 5 = 7 \text{ meninos}$$

Aplicando a fórmula da probabilidade:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{7}{30}$$

Como a fração $\frac{7}{30}$ é irredutível e resulta em uma dízima periódica (aproximadamente 0,2333...), a resposta final pode ser deixada em forma de fração ou expressa como aproximadamente 23,3%.

Exercício 3. Uma urna contém 3 bolas verdes e 2 bolas amarelas, idênticas em tamanho e massa. Duas bolas são sorteadas sucessivamente e **sem reposição** (a primeira bola não volta para a urna). Qual a probabilidade de ambas as bolas sorteadas serem verdes?

Resolução: Trata-se da probabilidade de dois eventos sucessivos (tirar verde na primeira e tirar verde na segunda), o que exige a multiplicação das probabilidades. Como não há reposição, o espaço amostral muda na segunda retirada.

- **1º Sorteio:** Há 5 bolas no total e 3 são verdes.

$$P(1^{\text{a}} \text{ ser verde}) = \frac{3}{5}$$

- **2º Sorteio:** Como uma bola verde já foi retirada, restam 4 bolas na urna, sendo apenas 2 verdes.

$$P(2^{\text{a}} \text{ ser verde}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Pelo princípio multiplicativo, a probabilidade de ocorrerem ambos os resultados é o produto das probabilidades individuais:

$$P(\text{verde e verde}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$$

3 Exercícios

Exercício 1. Considere o conjunto dos números naturais menores que 10, ou seja, os algarismos do sistema decimal $(0, 1, 2, \dots, 9)$. Ao sortear um desses números ao acaso, determine a probabilidade de o número sorteado ser:

- a) par.
- b) múltiplo de 3.
- c) maior do que 6.

Exercício 2. No lançamento de um dado não viciado de seis faces, numeradas de 1 a 6, qual a probabilidade de se obter um número primo?

Exercício 3. Sorteando-se ao acaso uma letra do alfabeto (composto por 26 letras), qual é a probabilidade de a letra sorteada ser uma vogal?

Exercício 4. Uma urna contém 20 bolas idênticas em tamanho e massa, numeradas de 1 a 20. Retira-se uma bola ao acaso. Calcule a probabilidade de o número sorteado ser:

- a) divisível por 5.
- b) um número de dois algarismos.

Exercício 5. Em uma turma de 8º ano, há 40 alunos. Uma pesquisa revelou que 24 desses alunos praticam esportes regularmente e 16 não praticam. Sabendo que há 20 meninas na turma e que 10 delas não praticam esportes, qual a probabilidade de, ao sortear um aluno ao acaso, o sorteado ser:

- a) um aluno (menino ou menina) que pratica esportes?
- b) um menino?
- c) um menino que pratica esportes?

Exercício 6. Uma escola realizou uma pesquisa com 100 alunos do 8º ano para identificar a disciplina favorita entre Matemática, Ciências e História. Os resultados foram organizados na tabela abaixo, separados pelo turno em que estudam:

Turno	Matemática	Ciências	História	Total
Matutino	15	12	23	50
Vespertino	10	20	20	50
Total	25	32	43	100

Ao sortear um desses alunos ao acaso, determine a probabilidade de que o sorteado:

- a) prefira Matemática.
- b) estude no turno matutino e prefira Ciências.
- c) não prefira História.

Exercício 7. O setor de recursos humanos de uma empresa levantou dados sobre o número de filhos de seus 60 funcionários. Os dados foram tabelados da seguinte forma:

Número de filhos	Quantidade de funcionários
0	18
1	24
2	12
3 ou mais	6

Escolhendo-se um funcionário ao acaso, qual é a probabilidade de que ele:

- a) não tenha filhos.
- b) tenha exatamente dois filhos.
- c) tenha pelo menos um filho.

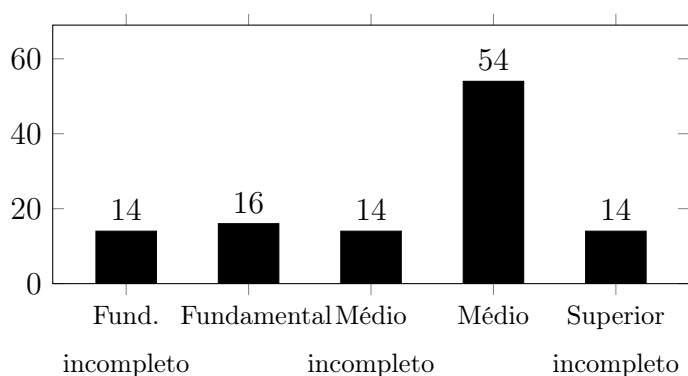
Exercício 8. Uma fábrica produz lâmpadas utilizando duas máquinas, A e B . Durante um dia de produção, uma amostra de 200 lâmpadas foi inspecionada para verificar a presença de defeitos. O relatório da inspeção gerou a seguinte tabela de contingência:

Máquina	Sem defeito	Com defeito
A	85	5
B	100	10

Selecionando-se uma lâmpada dessa amostra ao acaso, calcule a probabilidade de ela:

- a) ser defeituosa.
- b) ter sido produzida pela máquina B .
- c) ser uma lâmpada sem defeito produzida pela máquina A .

Exercício 9. A escolaridade dos jogadores de futebol nos grandes centros é maior do que se imagina, como mostra a pesquisa abaixo, realizada com os jogadores profissionais dos quatro principais clubes de futebol do Rio de Janeiro. De acordo com esses dados, se escolhermos ao acaso um dos jogadores pesquisados, qual a probabilidade de ele ter concluído o Ensino Médio?



Exercício 10. Lançam-se duas moedas honestas simultaneamente. Determine a probabilidade de se obter duas “caras”.

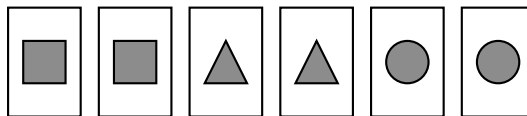
Exercício 11. No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos, qual a probabilidade de a soma dos valores obtidos nas faces voltadas para cima ser igual a 7?

Exercício 12. Numa urna há 20 bolinhas numeradas de 1 a 20. Retiram-se duas bolinhas dessa urna, uma após a outra, sem reposição. Qual a probabilidade de ter saído um número divisível por 3 e na sequência um múltiplo de 7?

Exercício 13. Uma caixa contém 5 canetas azuis e 3 canetas vermelhas. Um professor retira uma caneta ao acaso e, sem devolvê-la à caixa, retira uma segunda caneta. Calcule a probabilidade de:

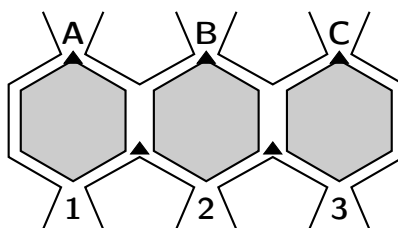
- a) a primeira caneta ser azul e a segunda ser vermelha.
- b) ambas as canetas serem vermelhas.

Exercício 14. Em um curso de computação, uma das atividades consiste em criar um jogo da memória com as seis cartas mostradas a seguir.



Inicialmente, o programa embaralha as cartas e apresenta-as viradas para baixo. Em seguida, o primeiro jogador vira duas cartas e tenta formar um par. Qual a probabilidade de que o primeiro jogador forme um par em sua primeira tentativa?

Exercício 15. No brinquedo ilustrado na figura abaixo, bolinhas são colocadas nas entradas A , B ou C e movem-se sempre para baixo, terminando nas caixas 1, 2 ou 3.



Ao atingir um dos pontos marcados com $\blacktriangle$, as bolinhas têm chances iguais de ir para cada um dos lados.

- Se uma bolinha for colocada em C , em quais caixas ela pode parar? E se ela for colocada em B ?
- Se uma bolinha for colocada em A , qual é a probabilidade de que ela vá parar na caixa 2? E se ela for depositada em B , qual é essa probabilidade?

Exercício 16. Em uma urna há 72 bolas idênticas, mas com cores diferentes. Há bolas brancas, vermelhas e pretas. Ao sortearmos uma bola da urna, a probabilidade de ela ser branca é $\frac{1}{4}$ e a probabilidade de ela ser vermelha é $\frac{1}{3}$. A diferença entre o número de bolas pretas e o número de bolas brancas na urna é

Exercício 17. Um professor de matemática entrega aos seus alunos uma lista contendo 10 problemas e avisa que 5 deles serão escolhidos ao acaso para compor a prova final. Se um aluno conseguiu resolver, corretamente, apenas 7 dos 10 problemas, a probabilidade de que ele acerte todos os problemas da prova é

Resoluções

