Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

Material de Apoio e Lista de Exercícios

Radiciação

Professor: **Danilo Kanno**

Guaratinguetá

1 Radiciação

A radiciação é a operação matemática inversa da potenciação. Enquanto na potenciação busca-se o resultado da multiplicação de fatores iguais, na radiciação procura-se a base que, elevada a um determinado expoente, resulta em um número dado.

De modo formal, sendo a um número real e n um número natural não nulo, define-se a raiz enésima de a como o número real b tal que:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

Para compreender a relação direta entre as duas operações, analise os casos numéricos a seguir:

Exemplo 1. Relação entre potência e raiz: Observe como a determinação da raiz depende do conhecimento da potência correspondente:

- $\sqrt{49} = 7$, pois sabe-se que $7^2 = 49$.
- $\sqrt{100} = 10$, pois sabe-se que $10^2 = 100$.
- $\sqrt[3]{8} = 2$, pois sabe-se que $2^3 = 8$.
- $\sqrt[4]{16} = 2$, pois sabe-se que $2^4 = 16$.

1.1 Elementos da Radiciação

Na expressão $\sqrt[n]{a} = b$, identificam-se os seguintes termos:

- **Índice (n):** indica quantas vezes a raiz deve ser multiplicada por si mesma para resultar no radicando.
- **Radicando (a):** o número do qual se deseja extrair a raiz.
- **Raiz (b):** o resultado da operação.
- **Radical ($\sqrt{}$):** o símbolo da operação.

2 Definições Importantes

Para garantir a existência da raiz no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), devem-se observar duas situações quanto à paridade do índice n:

a) **Se o índice n for par:** O radicando a deve ser não negativo ($a \geq 0$).

b) **Se o índice n for ímpar:** O radicando a pode ser qualquer número real ($a \in \mathbb{R}$).

Exemplo 2. Cálculo de raízes exatas: Determine o valor das seguintes raízes justificando através da potenciação:

a) $\sqrt{36}$

b) $\sqrt[3]{-8}$

c) $\sqrt[4]{81}$

Resolução:

a) $\sqrt{36} = 6$, pois $6^2 = 36$. (Lembre-se: quando o índice é omitido, considera-se $n = 2$).

b) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$.

c) $\sqrt[4]{81} = 3$, pois $3^4 = 81$.

Exemplo 3. Identificação de existência em $\mathbb{R}$: Analise a existência das raízes abaixo no conjunto dos números reais:

a) $\sqrt{-25}$

b) $\sqrt[5]{-32}$

Resolução:

a) $\sqrt{-25} \notin \mathbb{R}$. Como o índice é par (2), não existe número real que elevado ao quadrado resulte em um número negativo.

b) $\sqrt[5]{-32} = -2$. Como o índice é ímpar (5), é possível extrair a raiz de um número negativo.

3 Propriedades dos Radicais

Para facilitar o cálculo e a simplificação de expressões que envolvem raízes, utilizam-se propriedades operatórias específicas. Consideram-se, para as definições a seguir, a e b números reais positivos e m, n e p números naturais não nulos.

3.1 1ª Propriedade: Raiz de um produto

A raiz enésima de um produto é igual ao produto das raízes enésimas dos fatores.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Exemplo 4. Aplicação no produto: Verifique a igualdade decompondo o radicando:

$$\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$$

$$\sqrt{100} = 2 \cdot 5$$

$$10 = 10$$

3.2 2ª Propriedade: Raiz de um quociente

A raiz enésima de um quociente é igual ao quociente das raízes enésimas, desde que o denominador seja diferente de zero.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemplo 5. Aplicação na divisão: Separação da raiz do numerador e do denominador:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$$

3.3 3ª Propriedade: Potência de uma raiz

Para elevar um radical a uma potência, eleva-se o radicando a essa potência (mantendo-se o índice).

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplo 6. Introdução do expoente no radicando:

$$(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$$

3.4 4ª Propriedade: Raiz de uma raiz

A raiz enésima da raiz emésima de um número é igual à raiz desse número cujo índice é o produto dos índices originais.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Exemplo 7. Unificação de radicais:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Note que, calculando separadamente, obtém-se o mesmo resultado: $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

4 Simplificação de Radicais

Simplificar um radical significa escrevê-lo de maneira mais simples e equivalente, geralmente facilitando cálculos posteriores. Existem dois casos principais de simplificação.

4.1 1º Caso: Extração de fatores do radicando

Quando o expoente de um fator do radicando é maior ou igual ao índice da raiz, é possível extrair esse fator. Para isso, utiliza-se a decomposição em fatores primos e a propriedade da raiz de um produto.

O procedimento consiste em:

a) Decompor o radicando em fatores primos.
b) Agrupar os fatores em potências de expoente igual ao índice da raiz.
c) Aplicar a propriedade do produto e extrair a raiz exata.

Exemplo 8. Simplificação de raiz quadrada: Simplifique o radical $\sqrt{75}$.

Resolução:

- Fatoração de 75: $75 = 3 \cdot 5^2$.
- Substituição no radical: $\sqrt{3 \cdot 5^2}$.
- Separação (1ª propriedade): $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5^2}$.
- Resultado: $5\sqrt{3}$.

Exemplo 9. Simplificação com índice maior que 2: Simplifique o radical $\sqrt[3]{54}$.

Resolução:

- Fatoração de 54: $54 = 2 \cdot 3^3$.
- Substituição no radical: $\sqrt[3]{2 \cdot 3^3}$.
- Extração do fator com expoente igual ao índice: $3\sqrt[3]{2}$.

Exemplo 10. Decomposição de potências maiores: Simplifique $\sqrt{2^7}$.

Resolução: Como o índice é 2, deve-se reescrever 2^7 como produto de potências de expoente 2:

$$\sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^1}$$

Extraindo os fatores com expoente quadrático:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

4.2 2º Caso: Divisão do índice e do expoente pelo mesmo número

Quando o índice da raiz e o expoente do radicando possuem um divisor comum, é possível simplificar o radical dividindo ambos por esse número. Essa propriedade decorre da escrita do radical como potência de expoente fracionário.

$$\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplo 11. Redução de índice e expoente: Simplifique o radical $\sqrt[12]{3^8}$.

Resolução: O índice (12) e o expoente (8) são divisíveis por 4 (Máximo Divisor Comum).

$$\sqrt[12\div 4]{3^{8\div 4}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$

Exemplo 12. Simplificação direta: Simplifique $\sqrt[6]{100}$.

Resolução: Primeiro, escreve-se 100 como potência: $100 = 10^2$.

$$\sqrt[6]{100} = \sqrt[6]{10^2}$$

Dividindo índice e expoente por 2:

$$\sqrt[6\div 2]{10^{2\div 2}} = \sqrt[3]{10^1} = \sqrt[3]{10}$$

5 Operações com Radicais

Assim como nos números racionais, as operações com radicais seguem regras específicas. Para a adição e subtração, é fundamental o conceito de semelhança entre os termos. Já na multiplicação e divisão, utilizam-se as propriedades de unificação dos radicais.

5.1 Adição e Subtração

A soma ou subtração algébrica de radicais só pode ser realizada quando os radicais são **semelhantes**, ou seja, quando possuem o **mesmo índice** e o **mesmo radicando**.

Nesse caso, mantêm-se o radical e operam-se apenas os coeficientes (os números que multiplicam a raiz), aplicando a propriedade distributiva.

$$a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} = (a+b)\sqrt[n]{x}$$

Exemplo 13. Radicais semelhantes imediatos: Efetue as operações indicadas:

$$2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$$

Resolução: Como todos os termos possuem $\sqrt{5}$, operam-se os coeficientes:

$$(2+7-3)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

Quando os radicais não aparentam ser semelhantes inicialmente, deve-se tentar simplificá-los (extraindo fatores) para verificar se tornam-se semelhantes.

Exemplo 14. Simplificação prévia necessária: Calcule o valor da expressão:

$$\sqrt{18} + \sqrt{50}$$

Resolução: Inicialmente, os radicandos são diferentes. Realiza-se a simplificação:

- $\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$
- $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$

Substituindo na expressão original:

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

5.2 Multiplicação e Divisão

Para multiplicar ou dividir radicais de **mesmo índice**, conserva-se o índice e opera-se com os radicandos (multiplicando-os ou dividindo-os).

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Exemplo 15. Produto de radicais de mesmo índice:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$$

Exemplo 16. Divisão exata:

$$\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{40}{5}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Também é comum a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em expressões com parênteses.

Exemplo 17. Propriedade distributiva: Desenvolva a expressão:

$$\sqrt{2} \cdot (3 + \sqrt{8})$$

Resolução: Multiplica-se o termo externo por cada termo interno:

$$3 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$$

$$3\sqrt{2} + \sqrt{16}$$

$$3\sqrt{2} + 4$$

6 Racionalização de Denominadores

Racionalizar o denominador de uma fração consiste em obter uma fração equivalente cujo denominador seja um número racional. Esse processo facilita a realização de operações (como a soma de frações) e a comparação de valores.

Para racionalizar, multiplica-se o numerador e o denominador da fração pelo mesmo termo, denominado **fator racionalizante**.

6.1 1º Caso: O denominador é uma raiz quadrada

Quando o denominador é da forma $\sqrt{a}$, o fator racionalizante é a própria raiz $\sqrt{a}$. Ao multiplicar a fração por $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$, elimina-se o radical do denominador.

$$\frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{x \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{x\sqrt{a}}{a}$$

Exemplo 18. Racionalização simples: Racionalize o denominador da fração $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Resolução: Multiplica-se numerador e denominador por $\sqrt{2}$:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Exemplo 19. Simplificação após racionalizar: Racionalize $\frac{6}{\sqrt{3}}$.

Resolução:

$$\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3}$$

Simplificando a fração por 3:

$$2\sqrt{3}$$

6.2 2º Caso: O denominador é uma raiz de índice $n > 2$

Quando o denominador é da forma $\sqrt[n]{a^m}$ (com $n > m$), o fator racionalizante deve completar o expoente do radicando para que ele iguale o índice. O fator será $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Exemplo 20. Ajuste do expoente: Racionalize a fração $\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$.

Resolução: O índice é 5 e o expoente é 2. Faltam $5 - 2 = 3$ unidades para completar o expoente. Logo, o fator racionalizante é $\sqrt[5]{3^3}$.

$$\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{2\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{3^{2+3}}} = \frac{2\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2\sqrt[5]{27}}{3}$$

6.3 3º Caso: O denominador é uma soma ou diferença (Conjugado)

Quando o denominador apresenta uma soma ou subtração envolvendo raízes quadradas (ex: $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ou $a - \sqrt{b}$), utiliza-se o conceito de produtos notáveis:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

O fator racionalizante será o **conjugado** do denominador (troca-se apenas o sinal da operação).

Exemplo 21. Uso do conjugado: Racionalize a fração $\frac{4}{3+\sqrt{5}}$.

Resolução: O conjugado de $3 + \sqrt{5}$ é $3 - \sqrt{5}$. Multiplica-se a fração por esse fator:

$$\frac{4}{3 + \sqrt{5}} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$$

No denominador, aplica-se o produto notável (quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo):

$$(3)^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4$$

A expressão fica:

$$\frac{4(3 - \sqrt{5})}{4}$$

Simplificando o 4 do numerador com o denominador:

$$3 - \sqrt{5}$$

7 Potência com Expoente Fracionário

Até este momento, trabalharam-se potências com expoentes inteiros. Agora, expande-se o conceito para expoentes racionais (fracionários). Uma potência de base real positiva e expoente fracionário equivale a um radical.

A relação fundamental é definida da seguinte forma: o denominador da fração torna-se o índice da raiz, e o numerador torna-se o expoente do radicando.

Sendo a um número real positivo e $\frac{m}{n}$ uma fração irredutível com $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Essa definição permite transitar livremente entre a notação de potência e a notação de radical, facilitando simplificações e cálculos.

Exemplo 22. Conversão de radical para potência: Escreva os radicais a seguir na forma de potência com expoente fracionário:

a) $\sqrt[5]{7^3}$
b) $\sqrt{10}$
c) $\sqrt[3]{2}$

Resolução: O índice da raiz passa a ser o denominador do expoente.

a) $\sqrt[5]{7^3} = 7^{\frac{3}{5}}$
b) $\sqrt{10} = \sqrt[2]{10^1} = 10^{\frac{1}{2}}$
c) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^1} = 2^{\frac{1}{3}}$

Exemplo 23. Conversão de potência para radical: Transforme as potências em radicais e, quando possível, calcule o valor:

a) $5^{\frac{3}{4}}$
b) $8^{\frac{2}{3}}$
c) $36^{0,5}$

Resolução:

a) $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125}$

b) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$. Alternativamente: $(\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$.

c) $36^{0,5} = 36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$.

7.1 Expoente Fracionário Negativo

Quando o expoente fracionário é negativo, aplicam-se simultaneamente a regra do expoente negativo (inversão da base) e a definição de radiciação.

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Exemplo 24. Expoentes negativos: Calcule o valor de $16^{-\frac{1}{4}}$.

Resolução: Primeiro, inverte-se a base para tornar o expoente positivo:

$$16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{4}}}$$

Em seguida, converte-se a potência em raiz:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{16}}$$

Como $\sqrt[4]{16} = 2$ (pois $2^4 = 16$):

$$\frac{1}{2}$$

8 Exercícios

Exercício 1. Escreva a leitura correta de cada um dos radicais abaixo e identifique o índice e o radicando:

a) $\sqrt[3]{27}$

b) $\sqrt{10}$

c) $\sqrt[5]{-32}$

d) $\sqrt[4]{\frac{55}{7}}$

Exercício 2. Transforme as igualdades de potenciação em igualdades de radiciação, conforme o modelo: $2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$.

a) $5^2 = 25$

b) $3^4 = 81$

c) $(-2)^3 = -8$

d) $10^0 = 1$

Exercício 3. Analise os radicais a seguir e determine se o resultado pertence ao conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$):

a) $\sqrt{49}$

b) $\sqrt{-49}$

c) $\sqrt[3]{-8}$

d) $\sqrt[4]{-16}$

Exercício 4. Converta as potências com expoente fracionário em radicais e os radicais em potências:

a) $5^{\frac{2}{3}}$

b) $7^{0,5}$

c) $\sqrt[4]{3^5}$

d) $\sqrt{10}$

Exercício 5. Calcule o valor das seguintes raízes exatas:

a) $\sqrt{144}$

b) $\sqrt[3]{125}$

c) $\sqrt[4]{1}$

d) $\sqrt[3]{-27}$

e) $\sqrt{0,04}$

f) $\sqrt[3]{0,027}$

Exercício 6. Determine entre quais números inteiros consecutivos encontram-se as raízes não exatas a seguir (exemplo: $\sqrt{7}$ está entre 2 e 3, pois $2^2 = 4$ e $3^2 = 9$):

a) $\sqrt{15}$

b) $\sqrt{40}$

c) $\sqrt[3]{10}$

d) $\sqrt{85}$

Exercício 7. Calcule o valor das seguintes expressões numéricas envolvendo radicais:

a) $\sqrt{36} + \sqrt[3]{-8} - \sqrt[4]{16}$

b) $2\sqrt{49} - 3\sqrt{25} + \sqrt{100}$

c) $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt[3]{27}} + \sqrt[5]{-32}$

Exercício 8. Utilize a propriedade da raiz de um produto ou quociente para calcular as expressões separadamente:

a) $\sqrt{9 \cdot 25}$

b) $\sqrt{\frac{36}{49}}$

c) $\sqrt[3]{8 \cdot 1000}$

Exercício 9. Simplifique os radicais extraindo os fatores possíveis do radicando:

a) $\sqrt{50}$

b) $\sqrt{72}$

c) $\sqrt[3]{16}$

d) $\sqrt{2^5 \cdot 3^2}$

Exercício 10. Efetue as operações de adição e subtração simplificando os radicais quando necessário:

a) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{18} + 2\sqrt{50}$

c) $\sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{3}$

Exercício 11. Realize as multiplicações e divisões indicadas:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$

c) $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$

Exercício 12. Racionalize o denominador das frações a seguir:

a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$

c) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

Resoluções