Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

Material de Apoio e Lista de Exercícios

Semelhança de Triângulos

Professor: **Danilo Kanno**

Guaratinguetá

1 Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são considerados semelhantes quando possuem os três ângulos internos respectivamente congruentes e os lados homólogos proporcionais. A semelhança entre figuras geométricas implica que uma é uma "ampliação"ou "redução"da outra, mantendo suas proporções inalteradas.

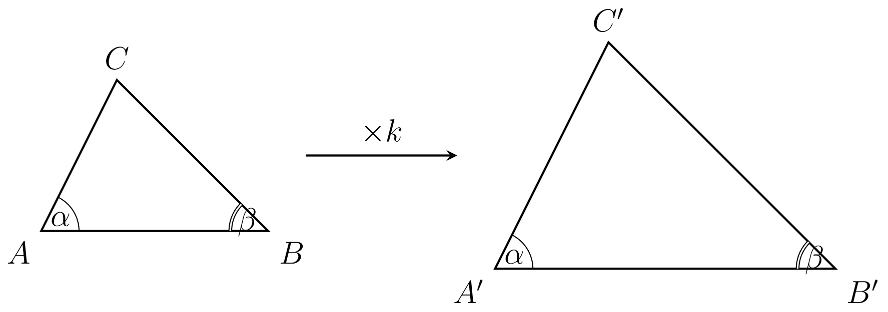
Definição de Semelhança

Sejam dois triângulos ABC e $A'B'C'$. Diz-se que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ se, e somente se:

- Os ângulos correspondentes são congruentes: $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ e $\hat{C} \equiv \hat{C}'$.
- A razão entre os lados correspondentes é constante:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$

Onde k é a constante de proporcionalidade (ou razão de semelhança).



Observa-se na figura acima que, apesar das dimensões distintas, a abertura dos ângulos permanece rigorosamente a mesma.

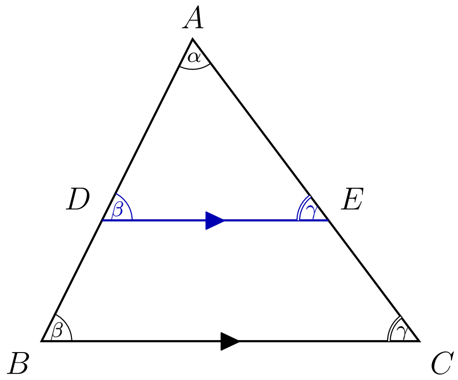
2 Teorema Fundamental da Semelhança

Uma consequência direta do Teorema de Tales aplicado aos triângulos é o Teorema Fundamental da Semelhança. Ele nos garante a existência de semelhança ao traçarmos paralelas internas ao triângulo.

Teorema Fundamental

Toda reta paralela a um lado de um triângulo, que intersecta os outros dois lados em pontos distintos, determina um triângulo semelhante ao primeiro.

Considere o triângulo ABC abaixo, onde traçamos o segmento $\overline{DE}$ tal que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



Como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, os ângulos correspondentes são congruentes e o ângulo $\hat{A}$ é comum a ambos os triângulos. Portanto:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

Isso implica que:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

3 Casos de Semelhança de Triângulos

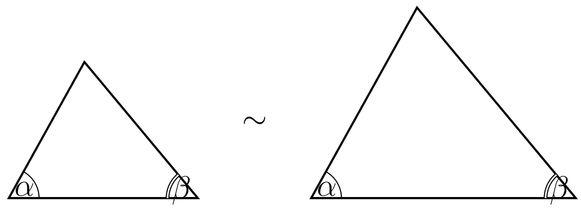
Para verificar se dois triângulos são semelhantes, não é necessário conferir todos os lados e ângulos. Existem condições mínimas e suficientes, chamadas de casos de semelhança.

3.1 1º Caso: Ângulo-Ângulo (AA)

Caso AA

Se dois triângulos possuem dois ângulos internos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes.

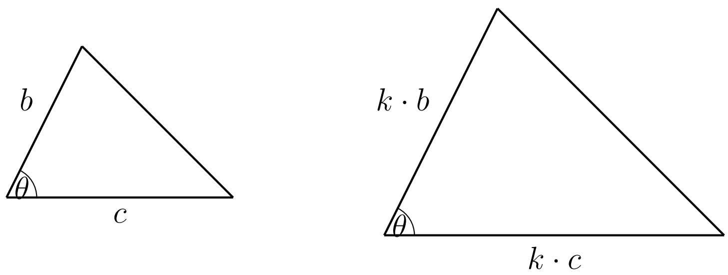
Observação: Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180°, se dois ângulos são iguais, o terceiro obrigatoriamente também será.



3.2 2º Caso: Lado-Ângulo-Lado (LAL)

Caso LAL

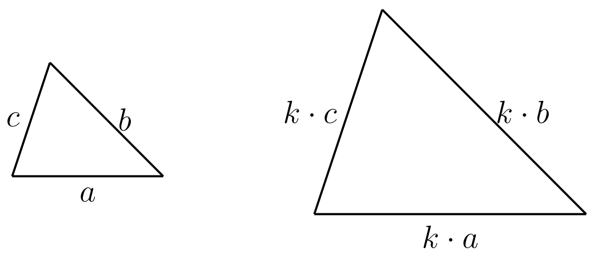
Se dois triângulos possuem dois lados proporcionais e o ângulo formado por esses lados é congruente, então eles são semelhantes.



3.3 3º Caso: Lado-Lado-Lado (LLL)

Caso LLL

Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.



4 Exercício Resolvido de Aplicação

Uma das aplicações mais antigas e úteis da semelhança de triângulos é a medição indireta de alturas inacessíveis.

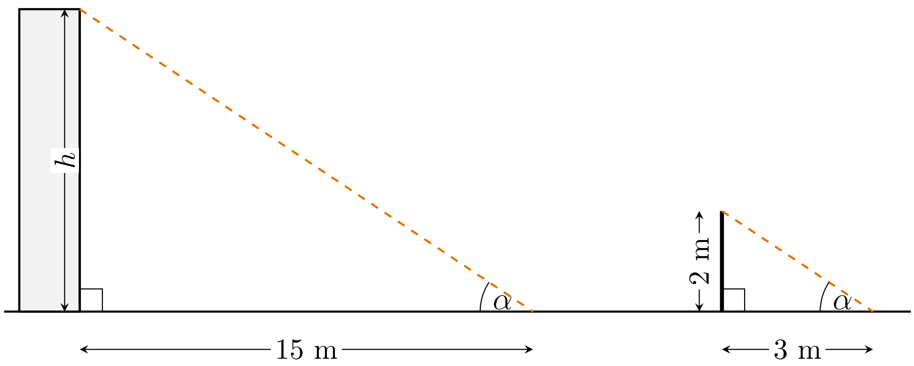
Exemplo Prático: A Sombra do Edifício

Um edifício projeta uma sombra de 15 metros no solo plano. No mesmo instante, um poste vertical de 2 metros de altura, situado próximo ao edifício, projeta uma sombra de 3 metros. Calcule a altura do edifício.

Solução:

Considerando que, num determinado instante, os raios solares atingem a Terra praticamente paralelos, o ângulo de incidência da luz com o solo (α) é o mesmo para ambos os objetos. Além disso, assumindo que tanto o edifício quanto o poste são perpendiculares ao solo, ambos formam ângulos de 90°.

Pelo caso **AA (Ângulo-Ângulo)**, os triângulos formados são semelhantes.



Pela semelhança dos triângulos, a razão entre a altura e a sombra é constante:

$$\frac{h_{\text{edifício}}}{h_{\text{poste}}} = \frac{s_{\text{sombra do edifício}}}{s_{\text{sombra do poste}}}$$

Substituindo os valores conhecidos:

$$\frac{h}{2} = \frac{15}{3}$$

Resolvendo a equação:

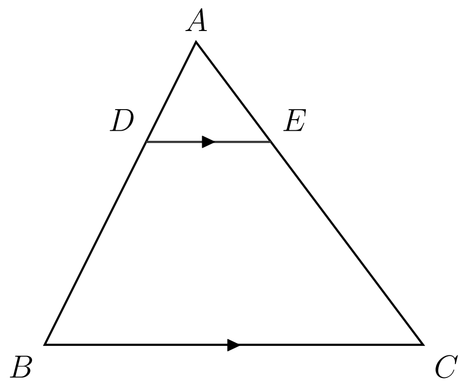
$$\frac{h}{2} = 5 \implies h = 5 \cdot 2 \implies h = 10$$

Resposta: A altura do edifício é de 10 metros.

5 Exercício Resolvido: Triângulos Sobrepostos

Exemplo: Triângulos Sobrepostos

Na figura abaixo, o segmento $\overline{DE}$ é paralelo à base $\overline{BC}$. Sabendo que $AD = 8$ cm, $DB = 16$ cm e $AE = 5$ cm, determine a medida do segmento EC.



Solução:

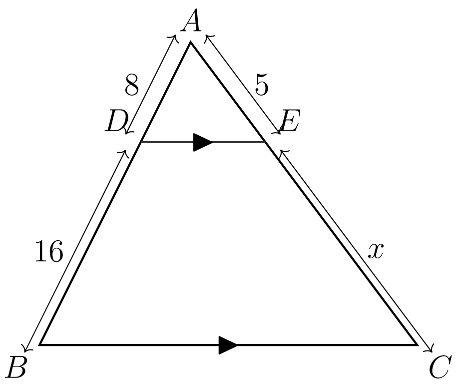
Como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, pelo Teorema Fundamental da Semelhança, temos que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Portanto, os lados homólogos são proporcionais.

Devemos ter cuidado ao identificar os lados correspondentes:

- Lado do triângulo menor: $AD = 8$
- Lado correspondente do triângulo maior: $AB = AD + DB = 8 + 16 = 24$
- Lado do triângulo menor: $AE = 5$
- Lado correspondente do triângulo maior: $AC = AE + EC = 5 + x$

Montando a proporção:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$



Substituindo os valores:

$$\frac{8}{24} = \frac{5}{5+x}$$

Simplificando a fração $\frac{8}{24}$ para $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{5+x}$$

Multiplicando cruzado:

$$1 \cdot (5+x) = 3 \cdot 5$$

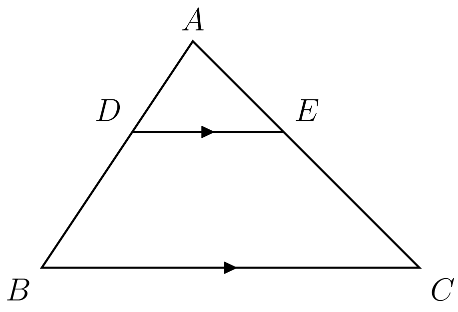
$$5 + x = 15$$

$$x = 10$$

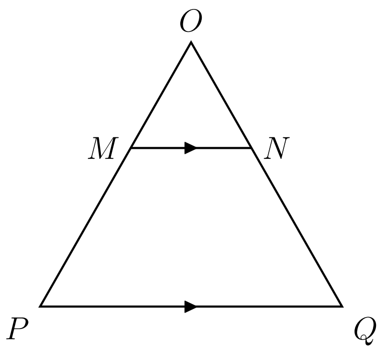
Resposta: O valor de EC é 10 cm.

6 Exercícios

Exercício 1. Considere o triângulo ABC representado abaixo, onde o segmento $\overline{DE}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$. Sabendo que $AD = x$, $DB = 6$, $AE = 4$ e $EC = 8$, determine o valor da incógnita x.

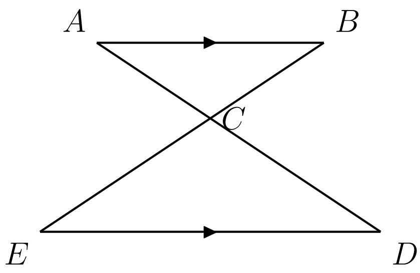


Exercício 2. Na figura a seguir, os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ são paralelos. Sabendo que $OM = 10$, $MP = 15$ e $MN = 8$, calcule a medida do segmento $\overline{PQ}$.

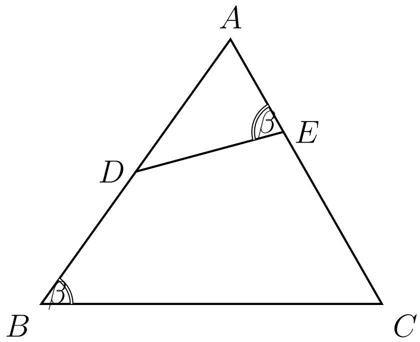


Exercício 3. Um observador nota que um poste vertical de 3 metros de altura projeta uma sombra de 4 metros no solo. No mesmo instante, uma torre vizinha projeta uma sombra de 24 metros. Assumindo que o terreno é plano, determine a altura da torre.

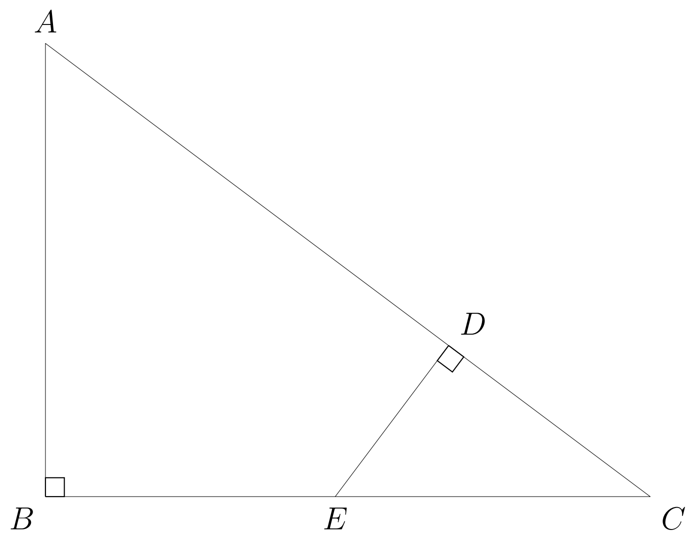
Exercício 4. Na figura abaixo, os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são paralelos. Sabendo que o segmento $AB = 10$, $DE = 15$ e $CD = 12$, determine a medida do segmento AC.



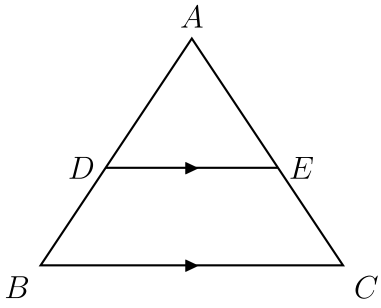
Exercício 5. Considere o triângulo ABC abaixo. O segmento $\overline{DE}$ foi traçado de tal forma que o ângulo $A\hat{E}D$ é congruente ao ângulo $A\hat{B}C$. Sabendo que $AE = 6$, $AD = 4$ e $AB = 12$, determine a medida do lado $\overline{AC}$.



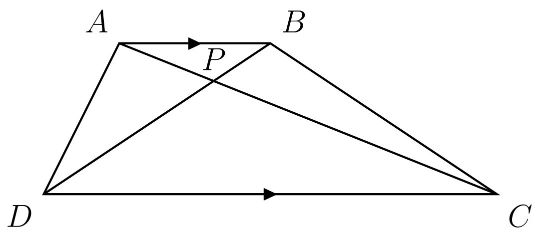
Exercício 6. Na figura a seguir, o triângulo ABC é retângulo em B. O segmento $\overline{DE}$ é perpendicular ao lado $\overline{AC}$. Sabendo que $AB = 18$, $BC = 24$ e $CD = 10$, calcule a medida do segmento $\overline{DE}$.



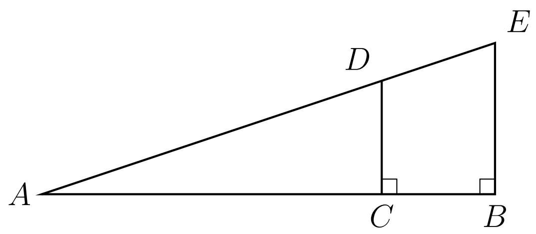
Exercício 7. No triângulo ABC representado a seguir, o segmento $\overline{DE}$ é paralelo à base $\overline{BC}$. As medidas dos segmentos são dadas por: $AD = x$, $DB = 3$, $AE = 8$ e $EC = 6$. Com base nessas informações, determine o valor de x.



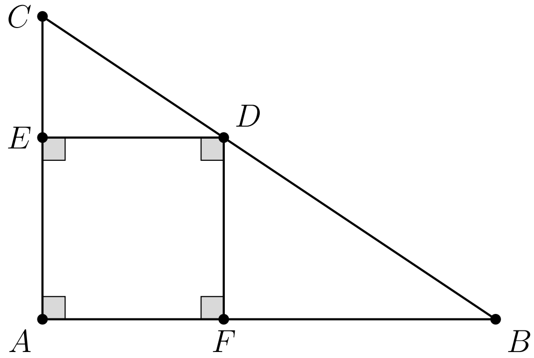
Exercício 8. A figura abaixo representa o trapézio $ABCD$, onde as bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelas. As diagonais se interceptam no ponto P. Sabendo que $AB = 5$, $AP = 4$ e $PC = 12$, calcule a medida da base maior $\overline{CD}$.



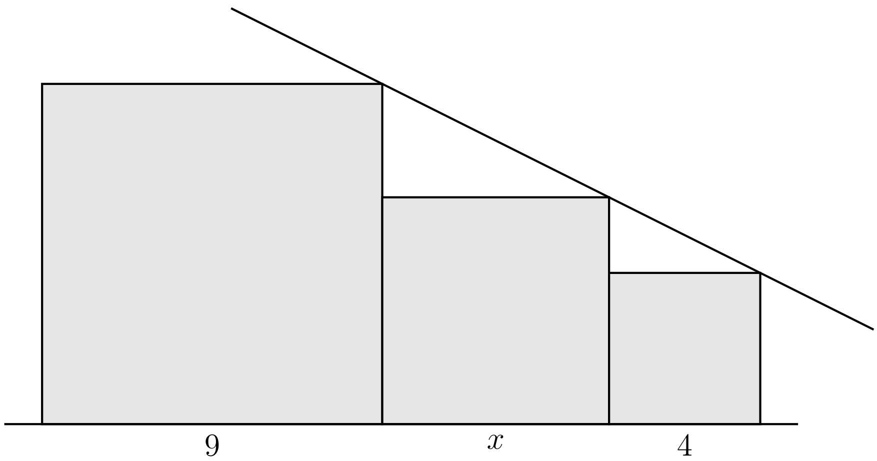
Exercício 9. Para sustentar uma rampa, foi colocada uma coluna vertical de sustentação no ponto C, conforme ilustrado na figura. Sabe-se que a altura total da rampa no ponto E é de 4 metros e que a distância da base A até o ponto B é de 12 metros. Se a coluna está posicionada a 9 metros do ponto A (ou seja, $AC = 9$), determine a altura h dessa coluna.



Exercício 10. Na figura abaixo, temos $AC = 4$ e $AB = 6$. Determine o perímetro do quadrado $AEDF$.



Exercício 11. Determine x na figura abaixo, na qual existem três quadrados de lado 9, x e 4.



Resoluções