



Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

Material de Apoio e Lista de Exercícios

Sequências Numéricas

Professor: Danilo Kanno

Guaratinguetá

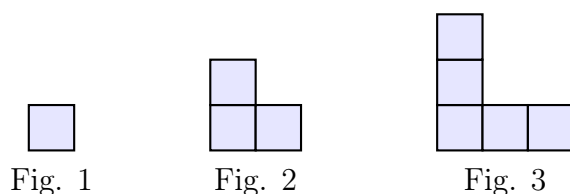
1 Conceito de Sequência e Padrões

Em diversos contextos da natureza e da matemática, observa-se que eventos, formas ou números podem se repetir e se desenvolver seguindo uma determinada regra lógica. Uma **sequência** é compreendida como um conjunto de elementos organizados em uma ordem bem definida.

Para ilustrar o conceito, consideram-se exemplos cotidianos, como a sucessão dos dias da semana (Domingo, Segunda-feira, Terça-feira, ...) ou a sucessão dos meses do ano. Nestes casos, a ordem dos elementos é fixa e previsível.

No estudo matemático, o foco recai sobre as sequências figurais (geométricas) e numéricas. O objetivo central é identificar o padrão — ou seja, a regularidade — que estabelece como o próximo elemento deve ser formado.

Exemplo 1. Observe a sequência de figuras formadas por quadrados. Cada nova figura acrescenta quadrados em uma disposição estrutural específica.



Nota-se que a quantidade de quadrados forma um padrão numérico: a cada passo, acrescentam-se dois quadrados (um na horizontal e um na vertical) em relação à figura anterior.

Exemplo 2. Considere o conjunto dos números naturais. A sequência formada por estes números, organizados em ordem crescente, é expressa por:

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

Identifica-se que a regularidade lógica desta sucessão estabelece que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se uma unidade ao termo imediatamente anterior.

2 Termos de uma Sequência e Expressão do Termo Geral

Para além do reconhecimento de padrões visuais ou numéricos, o estudo formal das sequências exige uma representação simbólica precisa para identificar cada um de seus elementos, denominados **termos**.

A posição de um termo na sequência é indicada por um índice n , pertencente ao conjunto dos números naturais não nulos ($n \in \mathbb{N}^*$). Assim:

- a_1 representa o primeiro termo ($n = 1$);
- a_2 representa o segundo termo ($n = 2$);
- a_3 representa o terceiro termo ($n = 3$);
- a_n representa o n -ésimo termo, também chamado de **termo geral** ou regra de formação.

A **expressão do termo geral** a_n estabelece uma relação funcional entre a posição n e o valor do termo correspondente, permitindo determinar qualquer elemento da sequência sem a necessidade de calcular todos os termos anteriores.

Exemplo 3. Considere a sequência formada pelos números pares não negativos:

$$(0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots)$$

Identificam-se os primeiros termos segundo suas posições:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 6$$

Observa-se que cada termo equivale ao dobro de sua posição subtraído de duas unidades, ou seja, ao produto de 2 pelo índice da posição antecedente. A expressão do termo geral dessa sequência é dada por:

$$a_n = 2(n - 1), \quad \text{para } n \geq 1$$

Para determinar o 15º termo (a_{15}), substitui-se $n = 15$ na expressão:

$$a_{15} = 2(15 - 1) = 2 \cdot 14 = 28$$

Exemplo 4. Uma sequência numérica tem seu termo geral definido pela lei de formação $a_n = 3n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Para obter os quatro primeiros termos dessa sucessão, atribuem-se os valores 1, 2, 3 e 4 à variável n :

$$a_1 = 3(1) + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$a_2 = 3(2) + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$a_3 = 3(3) + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$a_4 = 3(4) + 1 = 12 + 1 = 13$$

A sequência resultante é representada por $(4, 7, 10, 13, \dots)$.

3 Sequências Recursivas e Não Recursivas

No estudo das sucessões numéricas, a lei de formação pode ser classificada de acordo com a dependência estrutural entre os seus termos. Destacam-se duas categorias principais: as sequências recursivas e as não recursivas.

3.1 Sequências Recursivas

Uma sequência é classificada como **recursiva** (ou por recorrência) quando um determinado termo é calculado a partir do valor de um ou mais termos que o antecedem. Para que seja possível determinar os elementos desta sequência, é estritamente necessário conhecer pelo menos o primeiro termo (ou os termos iniciais) e a regra que relaciona um termo genérico a_n com o seu antecedente a_{n-1} .

Exemplo 5. Considere a sequência em que o primeiro termo é 5 e cada termo subse-

quente é obtido somando-se 4 ao termo imediatamente anterior.

Tem-se a seguinte definição recursiva:

- $a_1 = 5$
- $a_n = a_{n-1} + 4$, para $n \geq 2$

Os primeiros termos são calculados da seguinte forma:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1 + 4 = 5 + 4 = 9$$

$$a_3 = a_2 + 4 = 9 + 4 = 13$$

$$a_4 = a_3 + 4 = 13 + 4 = 17$$

A sequência gerada é $(5, 9, 13, 17, \dots)$.

Exemplo 6. A **Sequência de Fibonacci** é um dos exemplos mais clássicos de recorrência na matemática. Nela, os dois primeiros termos são iguais a 1, e cada termo seguinte é determinado pela soma dos dois termos imediatamente anteriores.

Sua lei de formação recursiva é dada por:

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 1$
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 3$

Logo, os próximos termos são:

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

$$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$$

A sequência obtida é expressa por $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$.

3.2 Sequências Não Recursivas

Em contrapartida, uma sequência é considerada **não recursiva** quando o valor do seu n -ésimo termo (a_n) depende unicamente da sua posição n , não necessitando do conhecimento do valor de termos anteriores. As sequências apresentadas na seção anterior, cujas expressões do termo geral permitem o cálculo direto, enquadram-se nesta categoria.

A principal vantagem de uma lei de formação não recursiva é a possibilidade de calcular termos em posições avançadas de maneira imediata. Por exemplo, para encontrar o centésimo termo (a_{100}), basta substituir $n = 100$ na expressão algébrica, dispensando o cálculo de todos os 99 termos antecedentes.

4 Progressão Aritmética (P.A.)

Dentre as diversas sequências numéricas, destaca-se uma categoria particular denominada **Progressão Aritmética** (P.A.). Uma P.A. é definida como uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se uma constante ao termo imediatamente anterior. Essa constante é chamada de **razão** da progressão e é representada pela letra r . Trata-se de um modelo clássico de sequência recursiva, cuja regra de formação básica é expressa por:

$$a_n = a_{n-1} + r, \quad \text{para } n \geq 2$$

4.1 Fórmula do Termo Geral da P.A.

Embora a definição de uma P.A. seja recursiva, a dependência exclusiva de somas constantes permite transformá-la em uma sequência não recursiva. Observa-se a formação dos termos a partir do primeiro termo (a_1):

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$$

Nota-se um padrão lógico: para alcançar um termo em uma determinada posição n , partindo de a_1 , adiciona-se a razão r exatamente $(n - 1)$ vezes. Formaliza-se, assim, a **fórmula do termo geral da Progressão Aritmética**:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Com esta expressão, torna-se viável determinar o valor de qualquer termo da progressão sem a necessidade de calcular todos os elementos intermediários.

Exemplo 7. Considere a sequência numérica $(2, 7, 12, 17, 22, \dots)$.

Primeiramente, constata-se que a diferença entre qualquer termo e seu antecedente é constante:

$$7 - 2 = 5 \quad \text{e} \quad 12 - 7 = 5$$

Portanto, a sequência é uma Progressão Aritmética de razão $r = 5$ e primeiro termo $a_1 = 2$.

Para calcular o 20º termo (a_{20}) dessa sequência, aplica-se a fórmula do termo geral, substituindo $n = 20$:

$$a_{20} = a_1 + (20 - 1)r$$

$$a_{20} = 2 + (19) \cdot 5$$

$$a_{20} = 2 + 95$$

$$a_{20} = 97$$

O vigésimo termo da progressão é 97.

Exemplo 8. Em uma Progressão Aritmética, sabe-se que o primeiro termo é $a_1 = 15$ e a razão é $r = -3$. Deseja-se encontrar o valor do termo que ocupa a 12ª posição (a_{12}).

Substituindo os valores conhecidos na fórmula do termo geral:

$$a_{12} = a_1 + (12 - 1)r$$

$$a_{12} = 15 + 11 \cdot (-3)$$

$$a_{12} = 15 - 33$$

$$a_{12} = -18$$

O décimo segundo termo desta P.A. é -18 .

5 Exercícios

Exercício 1. Analise as sequências abaixo e determine quais delas são progressões aritméticas, justificando cada caso.

- a) $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$
- b) $(8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, \dots)$
- c) $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots)$
- d) $(-5, -6, -7, -8, -9, \dots)$
- e) $(10, 13, 17, 22, \dots)$

Exercício 2. Escreva os cinco primeiros termos das seguintes progressões aritméticas:

- a) P.A. de primeiro termo igual a 4 e razão 3;
- b) P.A. de primeiro termo igual a 20 e razão -4 ;
- c) P.A. de primeiro termo igual a 1 e razão $\frac{1}{2}$.

Exercício 3. Dada a P.A. de termo geral $a_n = 5 + 2n$, com $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Calcule:

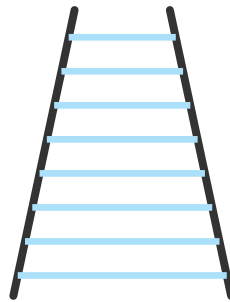
- a) o primeiro termo dessa P.A.;
- b) o décimo termo dessa P.A.;
- c) a razão dessa P.A.

Exercício 4. Maria começou a guardar moedas de 1 real com o intuito de juntar dinheiro para comprar um celular em 6 meses. Ela começou com dois reais e a cada dia juntava mais 3 reais do lanche, como ilustra a figura abaixo.



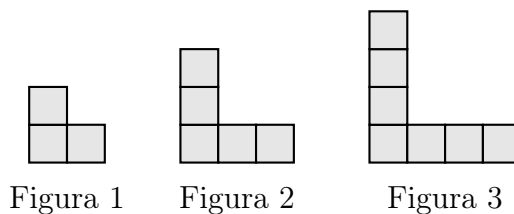
Ao final de 182 dias, quanto dinheiro ela terá guardado?

Exercício 5. Os comprimentos dos degraus da escada abaixo diferem uniformemente em 2 cm entre os vizinhos de cima para baixo.



O degrau mais inferior mede 45 cm. Qual a medida do segundo degrau de cima para baixo?

Exercício 6. Observe a sequência de figuras construídas com pequenos quadrados, que segue um padrão lógico de formação estrutural.



- Determine a quantidade de quadrados necessários para construir a Figura 4 e a Figura 5.
- Escreva a expressão algébrica (termo geral) que relaciona a quantidade de quadrados q com a posição n da figura na sequência.

Exercício 7. Analise as sequências numéricas a seguir. Identifique o padrão de formação e escreva os três próximos termos de cada uma.

- $(4, 9, 14, 19, \dots)$
- $(1, 4, 9, 16, \dots)$
- $(2, 6, 18, 54, \dots)$

Exercício 8. Uma sequência numérica não recursiva possui sua lei de formação definida pela expressão $a_n = 4n - 3$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

- Determine os cinco primeiros termos desta sequência.
- Calcule o valor numérico correspondente ao 50º termo (a_{50}).

Exercício 9. Considere uma sequência definida de forma recursiva pelas seguintes condições: o primeiro termo é $a_1 = 3$, e cada termo seguinte é obtido pela relação $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$, para $n \geq 2$.

Determine os quatro primeiros termos dessa sequência.

Exercício 10. Em uma Progressão Aritmética (P.A.), constata-se que o primeiro termo é $a_1 = 12$ e a razão é $r = 7$. Utilizando a fórmula do termo geral da P.A., resolva o que se pede:

- Calcule o valor do 21º termo (a_{21}) dessa progressão.
- Verifique se o número 138 pertence a essa sequência e, caso pertença, indique a sua posição n .

Exercício 11. Um ciclista inicia um programa de treinamentos visando uma competição. No primeiro dia, ele percorre 15 km. A partir do segundo dia, ele decide aumentar a distância percorrida em 4 km diários em relação ao dia anterior.

- Qual será a distância percorrida por este ciclista exatamente no 14º dia de treinamento?
- Escreva a lei de formação que determina a distância d_n percorrida no n -ésimo dia.

Resoluções

