



Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

Material de Apoio e Lista de Exercícios

Teorema de Pitágoras

Professor: **Danio Kanno**

Guaratinguetá

1 Revisão de Conceitos Fundamentais

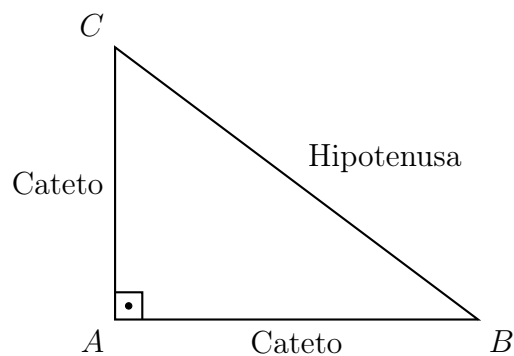
Antes da introdução formal do Teorema de Pitágoras, faz-se necessária uma revisão sobre o triângulo retângulo e a nomenclatura de seus elementos.

Um triângulo é classificado como retângulo quando possui um ângulo interno reto, ou seja, um ângulo cuja medida é exatamente 90° . Em consequência disso, os outros dois ângulos internos são agudos e complementares, isto é, a soma de suas medidas é igual a 90° .

Os lados de um triângulo retângulo recebem nomes específicos de acordo com a posição que ocupam em relação ao ângulo reto:

- **Hipotenusa:** É o lado de maior comprimento do triângulo. Encontra-se sempre na posição oposta ao ângulo de 90° .
- **Catetos:** São os dois lados de menor comprimento, responsáveis por formar o ângulo reto.

A figura a seguir ilustra um triângulo retângulo e a disposição geométrica de seus lados:



Curiosidade: A Origem dos Termos

Muitos termos matemáticos possuem raízes na língua grega antiga, refletindo o período em que a geometria clássica foi estruturada e formalizada.

A palavra **hipotenusa** deriva do grego *υποτείνουσα* (*hypoteinousa*), que pode ser traduzida como “aquela que se estende por baixo” (formada por *hypo*, “sob”, e *teinein*, “estender”). Geometricamente, se o triângulo retângulo for posicionado com o ângulo reto voltado para cima, a hipotenusa será a linha base que se estende sob ele.

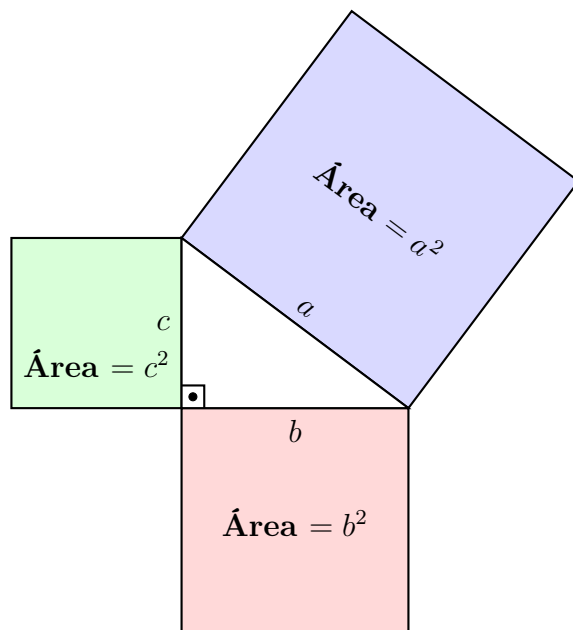
Por outro lado, o termo **cateto** origina-se do grego *κάθετος* (*kathetos*), que significa “linha perpendicular” ou “aquilo que cai verticalmente”. Na construção geométrica tradicional, um cateto frequentemente representa o segmento de reta que desce perpendicularmente sobre uma linha horizontal (o outro cateto), formando assim o ângulo de 90° .

2 Interpretação Geométrica do Teorema

O Teorema de Pitágoras estabelece uma relação não apenas entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, mas também entre as áreas das figuras geométricas regulares construídas sobre esses lados.

Ao desenhar um quadrado sobre cada um dos lados do triângulo, verifica-se que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é exatamente igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Seja um triângulo retângulo com hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c . A área do quadrado formado sobre a hipotenusa é a^2 , e as áreas dos quadrados formados sobre os catetos são b^2 e c^2 . Geometricamente, o teorema pode ser visualizado da seguinte forma:



Essa representação visual é de grande importância didática, pois evidencia que a relação pitagórica trata-se de uma equivalência de áreas. O entendimento desse conceito facilita a transição para a manipulação puramente algébrica.

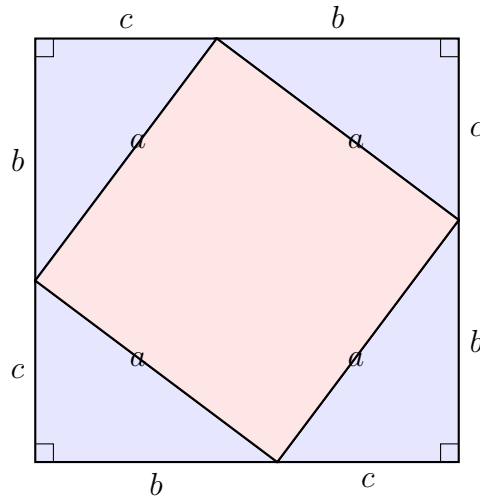
Dessa forma, a formulação matemática que rege o Teorema de Pitágoras é definida pela seguinte equação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

3 Demonstração Algébrica por Áreas

Existem diversas demonstrações matemáticas para o Teorema de Pitágoras ao longo da história. Uma das mais conhecidas e visuais utiliza o conceito de equivalência de áreas, conectando a geometria plana elementar com o cálculo algébrico.

Considere um quadrado maior cujo lado possui medida igual a $b + c$. No interior desse quadrado, dispõem-se quatro triângulos retângulos congruentes, em que os catetos medem b e c , e a hipotenusa mede a . A disposição geométrica desses triângulos nos cantos forma, no centro da figura, um quadrado menor cujo lado é exatamente a hipotenusa a .



A área total deste quadrado maior pode ser calculada por dois caminhos distintos, que devem resultar no mesmo valor:

1. Pela fórmula da área do quadrado:

Sendo o lado do quadrado maior igual a $b + c$, a sua área é determinada elevando-se o lado ao quadrado. Desenvolvendo o produto notável, obtém-se:

$$A = (b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

2. Pela soma das áreas das figuras internas:

A figura total é composta pelo quadrado menor central e pelos quatro triângulos retângulos.

- A área do quadrado menor é a^2 .
- A área de um triângulo retângulo é $\frac{b \cdot c}{2}$. Como há quatro triângulos idênticos, a área total ocupada por eles é $4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} = 2bc$.

Logo, a área total do quadrado maior também pode ser expressa pela soma algébrica:

$$A = a^2 + 2bc$$

Igualando as duas equações estabelecidas para a mesma área, tem-se a seguinte relação:

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

Subtraindo o termo $2bc$ de ambos os membros da igualdade, chega-se à formulação final do teorema:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

4 Cálculo de Lados Desconhecidos e Aplicações Diretas

A principal aplicação algébrica do Teorema de Pitágoras consiste em determinar a medida de um dos lados de um triângulo retângulo quando as grandezas dos outros dois lados são previamente conhecidas. Para isso, substituem-se os valores na relação fundamental $a^2 = b^2 + c^2$ e resolve-se a equação matemática resultante.

Apresentam-se a seguir os dois casos clássicos de aplicação direta: a determinação da hipotenusa e a determinação de um dos catetos.

4.1 Cálculo da Hipotenusa

Quando as medidas dos dois catetos são conhecidas, a hipotenusa é determinada extraindo-se a raiz quadrada da soma dos quadrados desses catetos.

Exemplo 1. Determinando a hipotenusa Em um triângulo retângulo, os catetos medem 3 cm e 4 cm. Determine a medida da hipotenusa.

Resolução:

Sejam os catetos $b = 3$ e $c = 4$, e a hipotenusa representada por x . Aplicando o teorema:

$$x^2 = b^2 + c^2$$

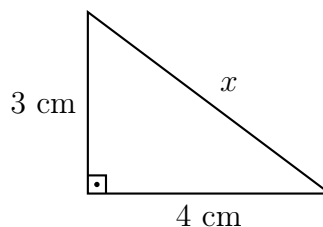
$$x^2 = 3^2 + 4^2$$

$$x^2 = 9 + 16$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25}$$

$$x = 5$$



A medida da hipotenusa é 5 cm.

4.2 Cálculo de um Cateto

Quando a medida da hipotenusa e de apenas um dos catetos são conhecidas, o cateto desconhecido é calculado isolando-se a respectiva variável na equação geométrica.

Exemplo 2. Determinando um cateto A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 13 cm e um de seus catetos mede 5 cm. Determine a medida do outro cateto.

Resolução:

Seja a hipotenusa $a = 13$, um cateto $b = 5$ e o outro cateto representado por x . Aplicando o teorema:

$$a^2 = b^2 + x^2$$

$$13^2 = 5^2 + x^2$$

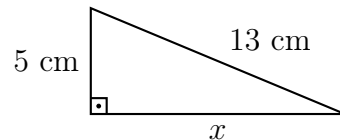
$$169 = 25 + x^2$$

$$x^2 = 169 - 25$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \sqrt{144}$$

$$x = 12$$



A medida do outro cateto é 12 cm.

5 Ternas Pitagóricas

Uma terna pitagórica é constituída por um conjunto de três números inteiros positivos que satisfazem plenamente a equação do Teorema de Pitágoras. Quando as medidas dos lados de um triângulo retângulo correspondem a uma terna pitagórica, a resolução algébrica pode ser substancialmente simplificada ou até mesmo realizada mentalmente.

A terna pitagórica mais elementar e recorrente na geometria é formada pelos números 3, 4 e 5. Qualquer triângulo cujos lados possuam medidas proporcionais a esses valores será, obrigatoriamente, um triângulo retângulo. O reconhecimento ágil dessas proporções é uma ferramenta valiosa para a otimização de tempo na resolução de problemas e em

Teorema de Pitágoras

competições acadêmicas, como uma Maratona Matemática.

Ao multiplicar os três valores da terna básica $(3, 4, 5)$ por um mesmo número inteiro positivo k ($k > 1$), obtêm-se novas ternas pitagóricas, denominadas derivadas. A tabela a seguir apresenta alguns dos múltiplos mais comuns dessa relação:

Fator multiplicador (k)	Cateto 1 ($3k$)	Cateto 2 ($4k$)	Hipotenusa ($5k$)
$k = 1$ (Terna Básica)	3	4	5
$k = 2$	6	8	10
$k = 3$	9	12	15
$k = 4$	12	16	20
$k = 10$	30	40	50

Além da família atrelada ao triângulo de lados 3, 4 e 5, existem outras ternas pitagóricas primitivas (aquelas em que o máximo divisor comum entre os três números é 1) que aparecem com elevada frequência em problemas matemáticos. Destacam-se as seguintes:

- 5, 12 e 13 (pois $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$)
- 8, 15 e 17 (pois $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$)
- 7, 24 e 25 (pois $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$)

Exemplo 3. Aplicação de ternas pitagóricas Determine a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 15 cm e 20 cm.

Resolução:

Em vez de aplicar a fórmula de forma extensa ($x^2 = 15^2 + 20^2$), verifica-se a possível proporcionalidade com a terna pitagórica básica $(3, 4, 5)$:

- O cateto de medida 15 equivale a 3×5 .
- O cateto de medida 20 equivale a 4×5 .

Constata-se que ambos os catetos são múltiplos de 3 e 4 pelo mesmo fator multiplicador ($k = 5$). Por consequência lógica, a hipotenusa será o produto de 5 por esse mesmo fator. Logo, a medida da hipotenusa é $5 \times 5 = 25$ cm.

Curiosidade: Ternos Pitagóricos na Antiguidade

Embora a terna $(3, 4, 5)$ seja a mais célebre, civilizações antigas já manipulavam proporções pitagóricas com valores surpreendentemente altos muito antes do nascimento de Pitágoras. Um dos registros matemáticos mais importantes da história é uma tábua de argila babilônica conhecida como *Plimpton 322*, datada de aproximadamente 1800 a.C.

Neste artefato, encontram-se listadas ternas pitagóricas complexas e pouco usuais, que exigiam métodos de cálculo sofisticados para a época. Além de valores como $(119, 120, 169)$, a tábua documenta ternas da ordem de dezenas de milhares, a exemplo de $(12709, 13500, 18541)$. A existência desse documento evidencia um domínio algébrico e geométrico profundo, demonstrando que as relações entre os lados dos triângulos retângulos já eram investigadas milênios antes de sua formalização na Grécia Antiga.

6 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

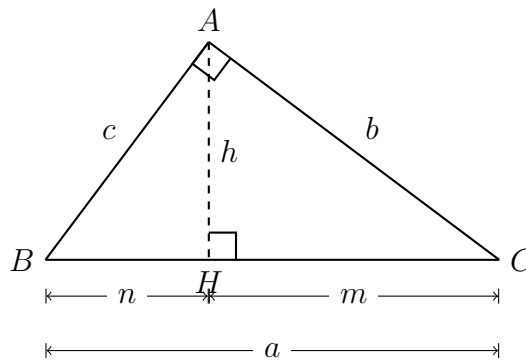
O Teorema de Pitágoras é a mais famosa das relações envolvendo o triângulo retângulo, mas não é a única. Ao traçar a altura relativa à hipotenusa, a figura original é dividida em dois triângulos menores. Esses novos triângulos são semelhantes entre si e também semelhantes ao triângulo original. Essa tripla semelhança origina um conjunto de equações conhecidas como relações métricas.

Para o estabelecimento dessas relações, consideram-se os seguintes elementos em um triângulo retângulo posicionado com a hipotenusa na base:

- a : medida da hipotenusa.
- b e c : medidas dos catetos.

Teorema de Pitágoras

- h : medida da altura relativa à hipotenusa.
- m : medida da projeção ortogonal do cateto b sobre a hipotenusa.
- n : medida da projeção ortogonal do cateto c sobre a hipotenusa.



A partir da semelhança entre os triângulos ABC , HBA e HAC , derivam-se as seguintes relações fundamentais:

- a) O quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto:

$$b^2 = a \cdot m \quad \text{e} \quad c^2 = a \cdot n$$

- b) O quadrado da medida da altura é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos:

$$h^2 = m \cdot n$$

- c) O produto da medida da hipotenusa pela medida da altura é igual ao produto das medidas dos catetos:

$$a \cdot h = b \cdot c$$

Nota-se, por observação direta da figura, que a soma das projeções compõe a hipotenusa ($a = m + n$). Ademais, ao somar as duas equações da primeira relação métrica, chega-se à demonstração algébrica do próprio Teorema de Pitágoras ($b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a(m + n) = a \cdot a = a^2$).

Exemplo 4. Aplicação das relações métricas: Em um triângulo retângulo, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 4 cm e 9 cm. Determine a medida da altura relativa à hipotenusa e as medidas dos catetos.

Resolução:

Sendo $m = 9$ e $n = 4$, a hipotenusa total mede $a = 9 + 4 = 13$ cm.

Para determinar a altura h , utiliza-se a relação que envolve as projeções:

$$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h^2 = 9 \cdot 4 = 36 \Rightarrow h = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

Para determinar as medidas dos catetos, utiliza-se a relação com a hipotenusa:

$$b^2 = a \cdot m \Rightarrow b^2 = 13 \cdot 9 = 117 \Rightarrow b = \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \text{ cm}$$

$$c^2 = a \cdot n \Rightarrow c^2 = 13 \cdot 4 = 52 \Rightarrow c = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ cm}$$

7 Aplicações na Geometria Plana

O Teorema de Pitágoras é uma ferramenta essencial para a determinação de segmentos de reta desconhecidos em diversas figuras planas. A estratégia fundamental consiste em traçar linhas auxiliares, como diagonais e alturas, de modo a revelar triângulos retângulos no interior dessas figuras.

7.1 Diagonal do Quadrado

Ao traçar a diagonal de um quadrado de lado l , a figura original é particionada em dois triângulos retângulos isósceles congruentes. A diagonal, denotada por d , atua como a hipotenusa de ambos os triângulos, enquanto os lados do quadrado assumem a função de catetos.

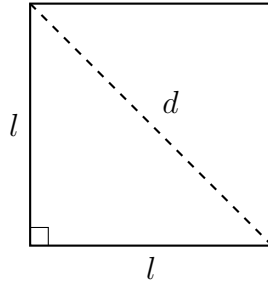
Aplicando o Teorema de Pitágoras, estabelece-se a seguinte relação:

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = 2l^2$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, obtém-se o comprimento da diagonal em função do lado:

$$d = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$



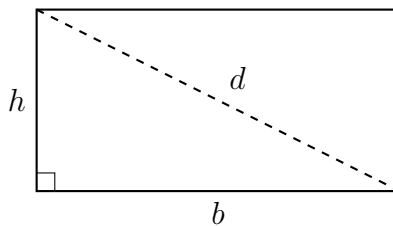
7.2 Diagonal do Retângulo

De modo análogo, a diagonal d de um retângulo de base b e altura h o divide em dois triângulos retângulos. Neste caso, os catetos possuem medidas distintas correspondentes às dimensões do retângulo.

A relação pitagórica para a diagonal do retângulo é dada por:

$$d^2 = b^2 + h^2$$

$$d = \sqrt{b^2 + h^2}$$



7.3 Altura do Triângulo Isósceles

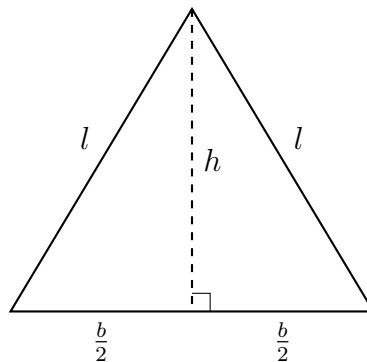
Em um triângulo isósceles (que possui pelo menos dois lados congruentes), a altura traçada a partir do vértice principal em direção à base atua não apenas como altura (h), mas

também como mediana. Isso significa que ela intercepta o ponto médio da base, dividindo-a em dois segmentos de mesma medida.

Dessa forma, formam-se dois triângulos retângulos no interior da figura. Para cada um deles, a hipotenusa é o lado congruente do triângulo original (l), um cateto é a própria altura (h) e o outro cateto corresponde à metade da base ($\frac{b}{2}$).

Aplicando a relação pitagórica, tem-se:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$



7.4 Altura do Triângulo Equilátero

O triângulo equilátero, caracterizado por possuir todos os lados congruentes de medida l , é um caso particular do triângulo isósceles. Conseqüentemente, a altura h traçada em relação a qualquer uma de suas bases também divide o lado oposto ao meio, formando dois triângulos retângulos congruentes.

Nesse contexto geométrico, a hipotenusa corresponde ao lado do triângulo (l), um dos catetos é a própria altura (h) e o outro cateto é a metade do lado ($\frac{l}{2}$).

A aplicação do Teorema de Pitágoras fornece a seguinte relação:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

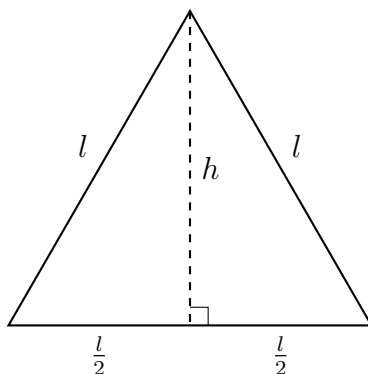
$$l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

Ao extrair a raiz quadrada de ambos os membros, determina-se a fórmula direta para o cálculo da altura do triângulo equilátero em função da medida de seu lado:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$



8 Resolução de Problemas Contextualizados

A aplicação do Teorema de Pitágoras estende-se muito além das figuras geométricas abstratas, sendo uma ferramenta indispensável para a resolução de problemas práticos do cotidiano, da física e da engenharia.

Para solucionar questões contextualizadas, o procedimento padrão consiste em traduzir o texto do problema para um modelo geométrico. Deve-se identificar os elementos que formam o ângulo reto e o segmento que representa a hipotenusa, construindo, assim, o triângulo retângulo que servirá de base para o cálculo.

Exemplo 5. Escada apoiada em um muro: Uma escada de 5 m de comprimento está apoiada em um muro vertical. Sabendo que a base da escada encontra-se a 3 m de distância do muro, determine a altura que a escada alcança no muro.

Teorema de Pitágoras

Resolução:

Neste modelo, o muro e o solo formam o ângulo reto (90°). A escada atua como a hipotenusa ($a = 5$), a distância no solo é um cateto ($c = 3$) e a altura no muro é o cateto desconhecido (h).

Aplicando a relação pitagórica:

$$5^2 = h^2 + 3^2$$

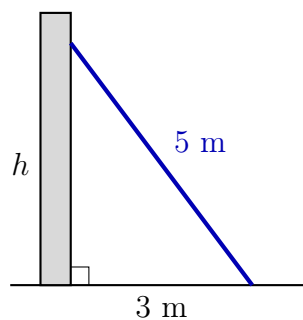
$$25 = h^2 + 9$$

$$h^2 = 25 - 9$$

$$h^2 = 16$$

$$h = \sqrt{16}$$

$$h = 4$$



A escada alcança uma altura de 4 m no muro.

Nota-se a presença da terna pitagórica básica (3, 4, 5).

Teorema de Pitágoras

Exemplo 6. Deslocamento em direções ortogonais: Um veículo parte de uma cidade A e desloca-se 8 km para o norte. Em seguida, muda sua trajetória e desloca-se 15 km para o leste, chegando à cidade B. Qual é a distância em linha reta entre a cidade A e a cidade B?

Resolução:

As direções norte e leste são ortogonais, formando um ângulo de 90° . Os deslocamentos representam os catetos (8 e 15), e a distância em linha reta procurada é a hipotenusa (d).

Aplicando o teorema:

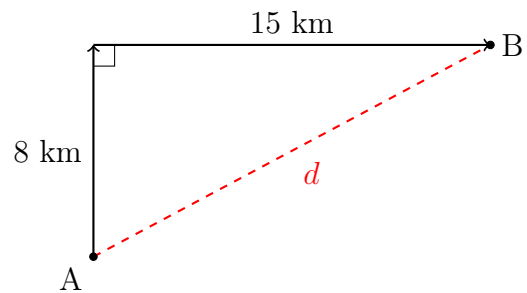
$$d^2 = 8^2 + 15^2$$

$$d^2 = 64 + 225$$

$$d^2 = 289$$

$$d = \sqrt{289}$$

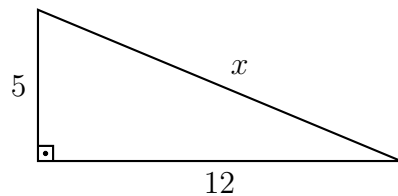
$$d = 17$$



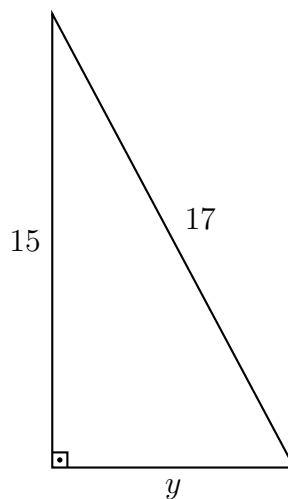
A distância em linha reta entre as cidades é de 17 km. Este caso ilustra a aplicação da terna pitagórica primitiva (8, 15, 17).

9 Exercícios

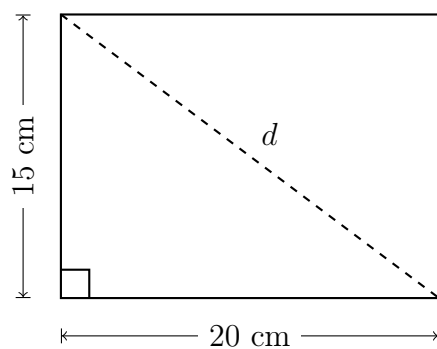
Exercício 1. Determine o valor da medida x no triângulo retângulo ilustrado a seguir.



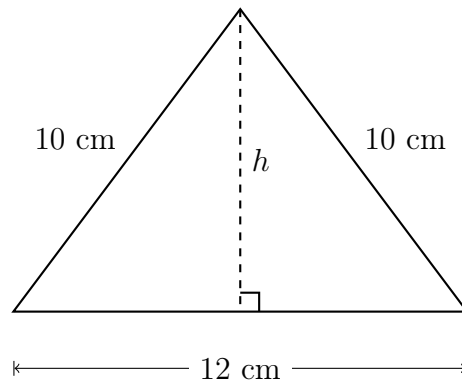
Exercício 2. Calcule a medida do cateto y no triângulo retângulo apresentado abaixo.



Exercício 3. Determine a medida da diagonal d do retângulo cujas dimensões estão indicadas na figura.



Exercício 4. No triângulo isósceles abaixo, os lados congruentes medem 10 cm e a base total mede 12 cm. Calcule a medida da altura h relativa à base.



Exercício 5. Determine o valor da medida desconhecida x nos casos abaixo, sabendo que tratam de triângulos retângulos:

- Um triângulo com catetos medindo 6 cm e 8 cm, sendo x a hipotenusa.
- Um triângulo com hipotenusa medindo 26 cm e um dos catetos medindo 10 cm, sendo x o outro cateto.

Exercício 6. Uma torre vertical de 24 m de altura é fixada ao chão por um cabo de aço esticado, que liga o topo da torre a um ponto no solo situado a 7 m da base da torre. Calcule o comprimento exato desse cabo de aço.

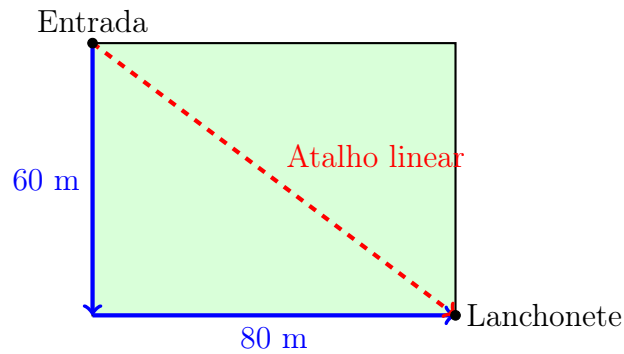
Exercício 7. A diagonal de um terreno retangular mede 50 m e um de seus lados mede 40 m. Calcule a medida do outro lado desse terreno e, em seguida, determine o seu perímetro (a soma de todos os lados).

Exercício 8. Determine a medida da altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 10 cm. (Deixe a resposta indicada com raiz quadrada, se necessário).

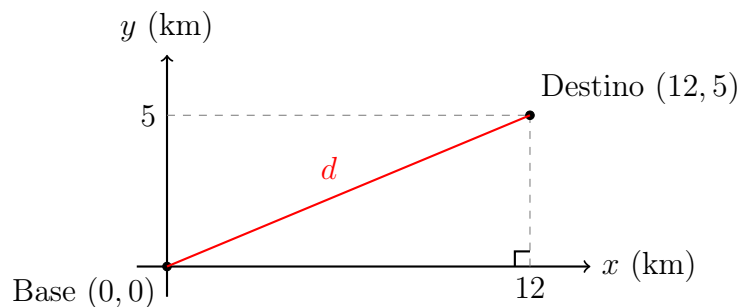
Exercício 9. Um ciclista parte de um ponto inicial e pedala 12 km para o norte. Em seguida, muda sua direção e pedala 9 km para o leste, parando para descansar. Qual é a distância em linha reta do ponto onde o ciclista parou até o ponto de partida original?

Exercício 10. Para a prova final de geometria da Maratona Matemática, propôs-se o seguinte desafio aos competidores: um quadrado está inscrito em um círculo de raio $r = 5\sqrt{2}$ cm. Sabendo que a diagonal deste quadrado coincide com o diâmetro do círculo, determine a medida do lado do quadrado e, por conseguinte, a sua área.

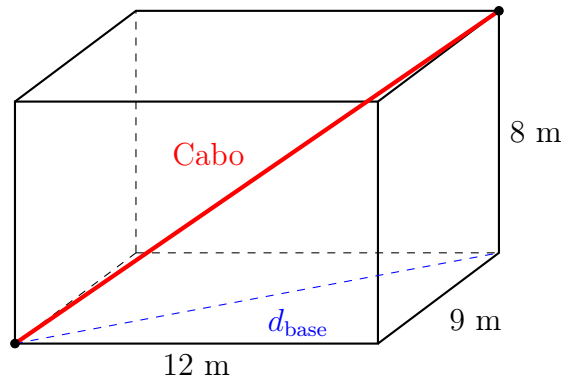
Exercício 11. Para ir do portão de entrada até a lanchonete de um parque, um visitante pode contornar um gramado retangular caminhando pelas calçadas laterais, que medem 80 m e 60 m, ou pode atravessar o gramado caminhando em linha reta pela diagonal. Quantos metros esse visitante economizará ao optar pelo trajeto retilíneo?



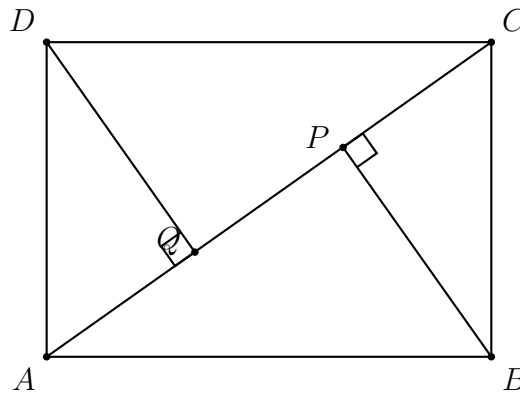
Exercício 12. No sistema de monitoramento de um centro de distribuição, a localização de drones é dada por coordenadas cartesianas medidas em quilômetros. Um drone de entrega parte da base, localizada na origem $(0,0)$, e voa em linha reta até o destino, localizado no ponto $(12,5)$. Qual é a distância linear total percorrida pelo drone?



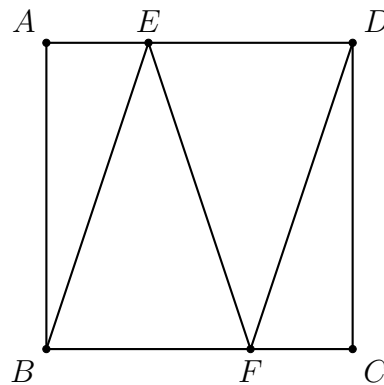
Exercício 13. Em um galpão retangular com dimensões de 12 m de comprimento, 9 m de largura e 8 m de altura, um cabo de fibra óptica precisa ser esticado em linha reta do canto inferior de uma parede até o canto superior oposto do galpão (diagonal espacial). Qual deve ser o comprimento mínimo desse cabo?



Exercício 14. Na figura a seguir, $ABCD$ é um retângulo e os pontos P e Q pertencem à diagonal AC de modo que $AQ = PQ = PC = 1$ e $A\hat{Q}D = B\hat{P}C = 90^\circ$. Determine a área do retângulo $ABCD$.



Exercício 15. Os pontos E e F estão nos lados AD e BC , respectivamente, do quadrado $ABCD$. Sabendo que $BE = EF = FD = 30$, determine a área do quadrado.



Resoluções

