



Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

# Material de Apoio e Lista de Exercícios

## Trigonometria I

Professor: Danilo Kanno

Guaratinguetá

# 1 A Origem da Trigonometria

A palavra **trigonometria** tem origem grega, sendo formada pela união de *trigonon* (triângulo) e *metron* (medida). Historicamente, o desenvolvimento dessa área da matemática não se deu pelo estudo de triângulos isolados, mas pela necessidade de resolver problemas práticos ligados à astronomia, à navegação e à agrimensura.

Os astrônomos da antiguidade precisavam calcular distâncias que não podiam ser medidas diretamente, como a distância entre a Terra e a Lua ou a posição dos astros. Para isso, relacionavam as medidas dos ângulos observados no céu com as cordas de circunferências.

### Curiosidade Histórica: O Pai da Trigonometria

O astrônomo e matemático grego **Hiparco de Niceia** (século II a.C.) é frequentemente considerado o "pai da trigonometria". Ele foi o responsável por construir a primeira tabela trigonométrica conhecida, relacionando as medidas de ângulos centrais com os comprimentos das cordas correspondentes em uma circunferência. Seu trabalho foi fundamental para prever eclipses e mapear constelações.

# 2 O Triângulo Retângulo e as Razões Trigonométricas

Antes de compreender o significado histórico dos nomes das razões trigonométricas, é necessário estabelecer os elementos geométricos fundamentais do triângulo retângulo. Este polígono caracteriza-se por possuir um ângulo interno reto (medindo  $90^\circ$ ).

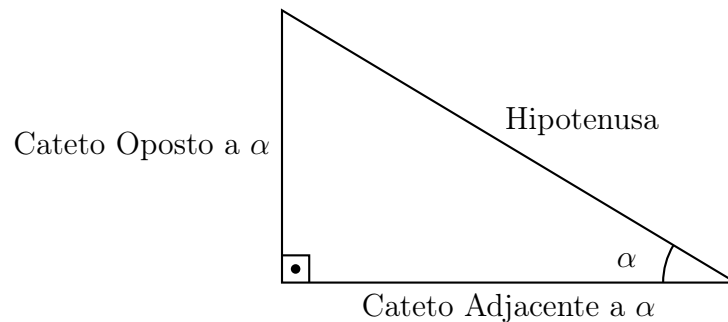
Os lados que formam o ângulo reto são denominados **catetos**, enquanto o lado oposto ao ângulo reto — e, conseqüentemente, o maior lado do triângulo — recebe o nome de **hipotenusa**.

A essência da trigonometria no triângulo retângulo consiste em relacionar a medida de seus ângulos agudos com a proporção (razão) entre as medidas de seus lados. Para isso, ao adotar um dos ângulos agudos como referência, os catetos recebem classificações relativas:

- **Cateto Oposto:** É o lado que se encontra de frente para o ângulo de referência.
- **Cateto Adjacente:** É o lado que ajuda a formar o ângulo de referência, juntamente

com a hipotenusa.

A ilustração a seguir demonstra a identificação destes elementos ao tomar o ângulo  $\alpha$  como referência:



A partir desta estrutura geométrica, definem-se as três razões trigonométricas fundamentais. Independentemente do tamanho do triângulo, se o ângulo  $\alpha$  for mantido constante, a proporção entre os seus lados será sempre a mesma.

### Definição das Razões Trigonométricas

Para um ângulo agudo  $\alpha$  pertencente a um triângulo retângulo:

- **Seno (sin):** É a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}$$

- **Cosseno (cos):** É a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

- **Tangente (tan):** É a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente.

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}}$$

### 3 A Razão dos Nomes: Seno, Cosseno e Tangente

No estudo da trigonometria no triângulo retângulo, utilizam-se três relações fundamentais. Os nomes dessas relações carregam uma longa história de traduções e adaptações ao longo dos séculos.

#### 3.1 A estranha origem da palavra "Seno"

A origem do termo **seno** é um dos casos mais curiosos de erro de tradução na história da matemática. Originalmente, os matemáticos indianos utilizavam a palavra sânscrita *ardha-jya* (que significa "meia-corda") para descrever essa relação. Com o tempo, o termo foi abreviado apenas para *jya*.

Quando os árabes traduziram os textos indianos, transliteraram a palavra para *jiba*, escrevendo-a apenas com as consoantes *jb*, conforme a regra do idioma. Séculos depois, ao traduzirem os textos árabes para o latim, os tradutores europeus confundiram *jb* com a palavra árabe *jaib*, que significa "dobra", "bolso" ou "seio". A tradução latina para essa palavra é *sinus*, que originou a palavra "seno" em português.

#### 3.2 O Cosseno: O companheiro do Seno

O termo **cosseno** tem uma origem muito mais direta e lógica. Ele surgiu a partir da expressão latina *complementi sinus*, que significa literalmente "o seno do complemento".

Em um triângulo retângulo, os dois ângulos agudos são complementares (ou seja, a soma de suas medidas é  $90^\circ$ ). Observa-se que o seno de um ângulo é exatamente igual ao cosseno do seu ângulo complementar. O prefixo "co-" em cosseno indica exatamente essa relação de complementaridade.

#### 3.3 A Tangente e as Sombras

A palavra **tangente** vem do latim *tangens*, que significa "aquilo que toca". Na geometria, uma reta tangente é aquela que toca uma circunferência em um único ponto.

A relação da tangente foi estudada separadamente do seno e do cosseno, principalmente por sua forte ligação com o relógio de sol. O comprimento da sombra projetada por uma haste vertical (chamada de gnômon) varia conforme a inclinação (ângulo) dos raios solares. A matemática utilizada para calcular essas sombras é exatamente a mesma que define a tangente de um ângulo.

### Resumo das Definições no Triângulo Retângulo

Considerando um ângulo agudo  $\alpha$  em um triângulo retângulo:

- **Seno (sin):** Razão entre o cateto oposto a  $\alpha$  e a hipotenusa.
- **Cosseno (cos):** Razão entre o cateto adjacente a  $\alpha$  e a hipotenusa.
- **Tangente (tan):** Razão entre o cateto oposto a  $\alpha$  e o cateto adjacente a  $\alpha$ .

## 4 Os Ângulos Notáveis: $30^\circ$ , $45^\circ$ e $60^\circ$

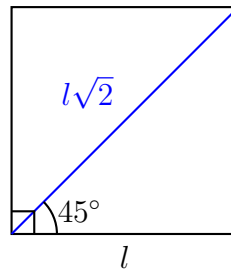
Na trigonometria, os ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$  são classificados como **notáveis** devido à sua frequência em problemas geométricos e, principalmente, pelo fato de suas razões trigonométricas serem derivadas diretamente de polígonos regulares: o quadrado e o triângulo equilátero.

### 4.1 O Ângulo de $45^\circ$ e o Quadrado

A origem das razões de  $45^\circ$  reside na diagonal de um quadrado de lado  $l$ . Ao traçar a diagonal, o quadrado é dividido em dois triângulos retângulos isósceles, onde os ângulos agudos medem  $45^\circ$ .

Pelo Teorema de Pitágoras, a diagonal  $d$  de um quadrado é dada por  $d = l\sqrt{2}$ . Ao aplicar as definições de seno, cosseno e tangente para o ângulo de  $45^\circ$ :

- $\sin(45^\circ) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos(45^\circ) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan(45^\circ) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{l}{l} = 1$

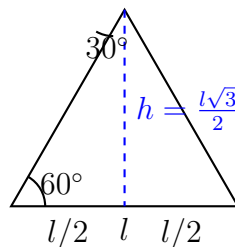


### 4.2 Os Ângulos de $30^\circ$ , $60^\circ$ e o Triângulo Equilátero

Para obter as razões de  $30^\circ$  e  $60^\circ$ , utiliza-se um triângulo equilátero de lado  $l$ . Ao traçar a altura relativa a um dos lados, o triângulo é dividido em dois triângulos retângulos congruentes.

A altura  $h$  divide a base ao meio ( $\frac{l}{2}$ ) e o ângulo interno de  $60^\circ$  em dois ângulos de  $30^\circ$ . Pelo Teorema de Pitágoras, a altura é calculada como  $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ .

- Para  $30^\circ$ :  $\sin(30^\circ) = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2}$  e  $\cos(30^\circ) = \frac{l\sqrt{3}/2}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Para  $60^\circ$ :  $\sin(60^\circ) = \frac{l\sqrt{3}/2}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $\cos(60^\circ) = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2}$



### 4.3 Tabela de Valores Notáveis

A sistematização destes valores é frequentemente organizada em uma tabela para consulta rápida. Uma técnica didática comum para a memorização da sequência dos numeradores para o seno e o cosseno é a contagem progressiva e regressiva (1, 2, 3 e 3, 2, 1), todos sob raiz quadrada e divididos por dois.

Razão	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

### Nota Linguística: A Tangente

Observa-se que a tangente de 45° é exatamente 1. Isso ocorre porque, em um triângulo retângulo com ângulo de 45°, os catetos são iguais. Historicamente, isso reforça a conexão da tangente com a medição de sombras: quando o Sol está a uma inclinação de 45°, a sombra de um objeto vertical tem exatamente o mesmo comprimento que a sua altura.

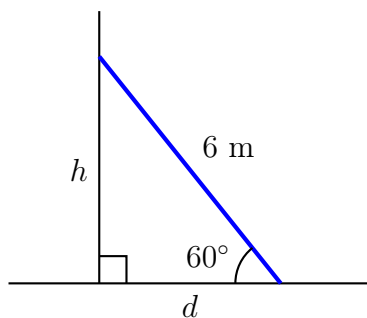
## 5 Exemplos Resolvidos

A resolução de problemas envolvendo a trigonometria no triângulo retângulo exige, primeiramente, a correta interpretação do enunciado e a construção de um esboço geométrico. A partir da figura, identifica-se qual razão trigonométrica (seno, cosseno ou tangente) relaciona os dados conhecidos com a medida que se deseja descobrir.

**Exemplo 1.** Uma escada de 6 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical, formando um ângulo de 60° com o solo plano. Determine a altura que a escada atinge na parede e a distância entre o pé da escada e a base da parede.

### Resolução:

Ao modelar o problema, a escada representa a hipotenusa do triângulo retângulo, a altura da parede é o cateto oposto ao ângulo de 60°, e a distância no solo é o cateto adjacente.



### 1. Cálculo da altura ( $h$ ):

Relaciona-se o cateto oposto ( $h$ ) e a hipotenusa (6 m) através do seno:

$$\sin(60^\circ) = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} \implies \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{6}$$

$$2h = 6\sqrt{3} \implies h = \frac{6\sqrt{3}}{2} \implies h = 3\sqrt{3} \text{ m}$$

Considerando a aproximação  $\sqrt{3} \approx 1,73$ , a altura é de aproximadamente 5,19 m.

### 2. Cálculo da distância no solo ( $d$ ):

Relaciona-se o cateto adjacente ( $d$ ) e a hipotenusa (6 m) através do cosseno:

$$\cos(60^\circ) = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}} \implies \frac{1}{2} = \frac{d}{6}$$

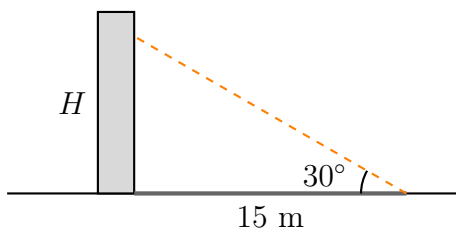
$$2d = 6 \implies d = 3 \text{ m}$$

A escada atinge uma altura de  $3\sqrt{3}$  m e seu pé está a 3 m da parede.

**Exemplo 2.** Em um determinado momento do dia, os raios solares incidem sobre a Terra com uma inclinação de  $30^\circ$  em relação ao solo plano. Nesse instante, uma torre projeta uma sombra de 15 m de comprimento. Desconsiderando a curvatura da Terra, calcule a altura desta torre.

### Resolução:

Neste cenário, a torre (cateto oposto) e sua sombra (cateto adjacente) formam um triângulo retângulo com o raio solar (hipotenusa). Como o problema não fornece e não solicita a medida da hipotenusa, utiliza-se a tangente.



## Trigonometria I

---

Aplicando a razão trigonométrica da tangente para o ângulo de  $30^\circ$ :

$$\tan(30^\circ) = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}} \implies \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{H}{15}$$

$$3H = 15\sqrt{3} \implies H = \frac{15\sqrt{3}}{3} \implies H = 5\sqrt{3} \text{ m}$$

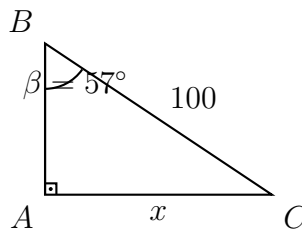
Considerando a aproximação  $\sqrt{3} \approx 1,73$ , a altura da torre é de aproximadamente 8,65 m.

## 6 Exercícios

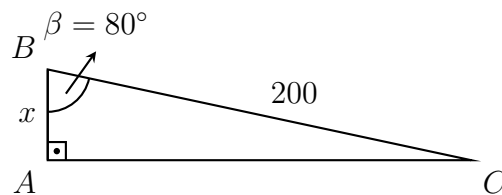
**Exercício 1.** Utilizando os dados aproximados da tabela abaixo, calcule o que se pede:

Arco	sen	cos	tg
$15^\circ$	0,26	0,97	0,27
$20^\circ$	0,34	0,93	0,37
$30^\circ$	0,50	0,87	0,58
$40^\circ$	0,64	0,77	0,84
$57^\circ$	0,84	0,54	1,54
$80^\circ$	0,98	0,17	5,67

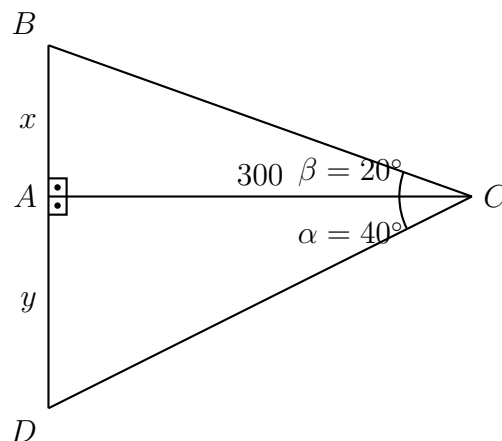
a) Qual o valor de  $x$ ?



b) Qual o valor de  $x$ ?

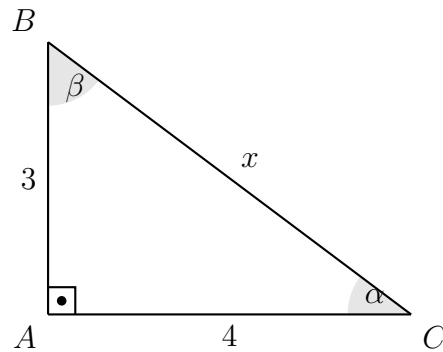


c) Qual o valor de  $x + y$ ?

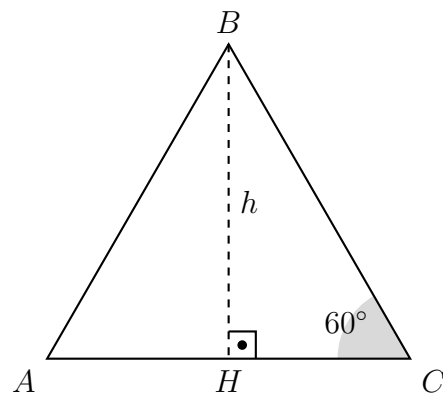


- d) Seja o triângulo  $ABC$ , retângulo em  $B$ , com  $\hat{B}AC = 15^\circ$  e  $D \in AB$  tal que  $\angle ADC = 150^\circ$ . Sendo  $DB = 400$  cm qual é o valor de  $AC$ ?

**Exercício 2.** No triângulo da figura abaixo calcule os valores dos senos, cossenos e tangentes de  $\alpha$  e  $\beta$ .



**Exercício 3.** A figura abaixo representa um triângulo  $ABC$ , equilátero, com lado medindo 2 cm e altura  $BH$ .



Quais os valores do:

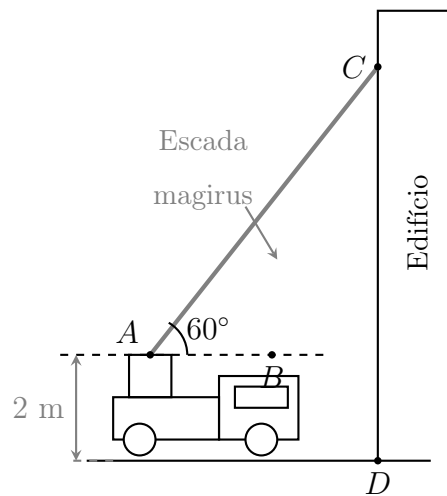
- a)  $\text{sen } 60^\circ$ ,  $\text{cos } 60^\circ$  e  $\text{tg } 60^\circ$
- b)  $\text{sen } 30^\circ$ ,  $\text{cos } 30^\circ$  e  $\text{tg } 30^\circ$

**Exercício 4.** Uma escada rolante liga dois andares de uma loja e tem uma inclinação de  $30^\circ$ . Sabendo que a escada rolante tem 10 m de comprimento, qual é a altura entre os dois andares?

**Exercício 5.** Uma pessoa na margem de um rio vê, sob um ângulo de  $60^\circ$ , uma torre na margem oposta. Quando ela se afasta 30 metros esse ângulo diminui para  $30^\circ$ . Qual é a largura do rio?

**Exercício 6.** Sobre uma rampa de 6 m de comprimento e inclinação de  $30^\circ$  com a horizontal, devem-se construir degraus de altura 25 cm. Quantos degraus desse tipo serão construídos?

**Exercício 7.** Ao atender o chamado de um incêndio em um edifício, o corpo de bombeiros de uma cidade utilizou um veículo de combate a incêndio, dotado de escada Magirus. Esse veículo possibilita atender a resgates a uma altura máxima de 54 metros, utilizando um ângulo máximo de levantamento de  $60^\circ$ .

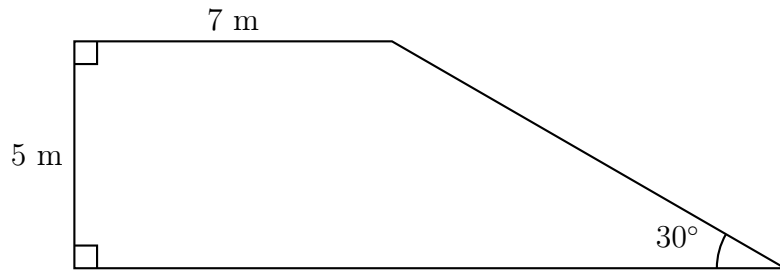


- Qual o comprimento dessa escada quando totalmente esticada?
- Houve um problema e o ângulo de levantamento foi reduzido em 25%. Qual é a nova altura máxima alcançada?

**Exercício 8. (COTEL 2025)** Um arquiteto está projetando um edifício e deseja calcular a altura de uma torre. Ele mede o ângulo de elevação da torre a partir de um ponto a 50 metros de distância da base da torre, e encontra que o ângulo de elevação é de  $30^\circ$ . Qual é a altura da torre?

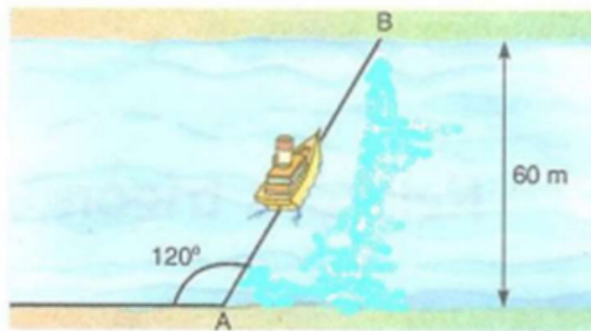
**Exercício 9. (COTEL 2024)** Um trapézio isósceles tem sua base maior igual a 10 cm e sua base menor igual a 2 cm. Um dos ângulos internos do trapézio vale  $135^\circ$ . Cada lateral do trapézio mede:

**Exercício 10. (COTEL 2024)** Um terreno tem o formato de um trapézio conforme a figura abaixo:

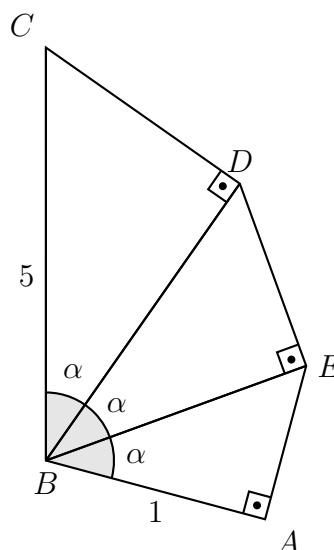


Será necessário cercar o terreno, sendo assim a metragem total da cerca será de:

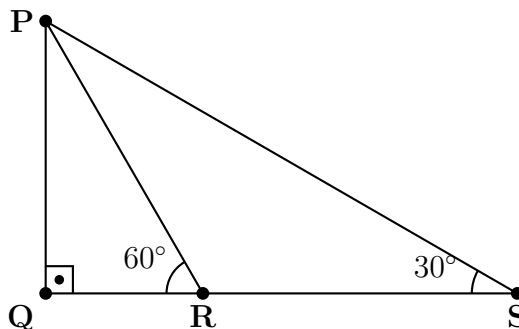
**Exercício 11. (COTEL 2023)** Um barco parte de  $A$  para atravessar o rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de  $120^\circ$  com a margem do rio. Sendo a largura do rio 60 m. A distância  $AB$  será:



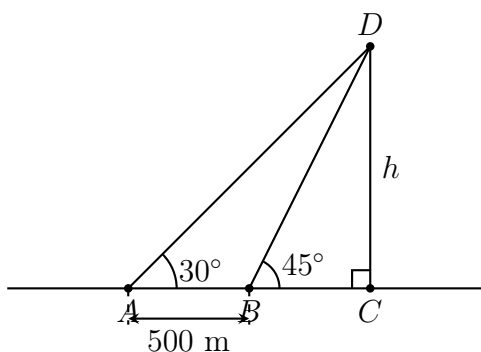
**Exercício 12.** Na figura a seguir estão assinalados três ângulos retos e três ângulos de medida  $\alpha$ . Sendo  $AB = 1$  e  $BC = 5$ , o valor de  $\cos \alpha$  é:



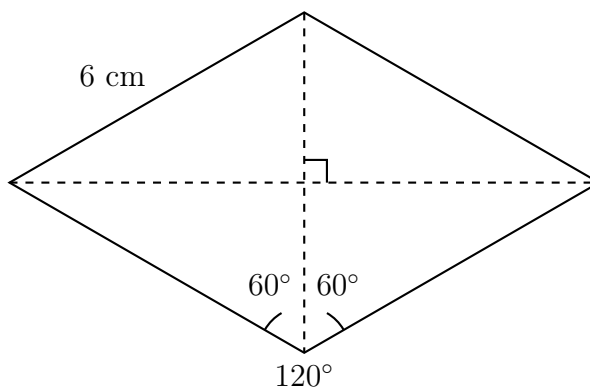
**Exercício 13.** Considere os triângulos retângulos  $PQR$  e  $PQS$  da figura a seguir. Se  $RS = 100$ , quanto vale  $PQ$ ?



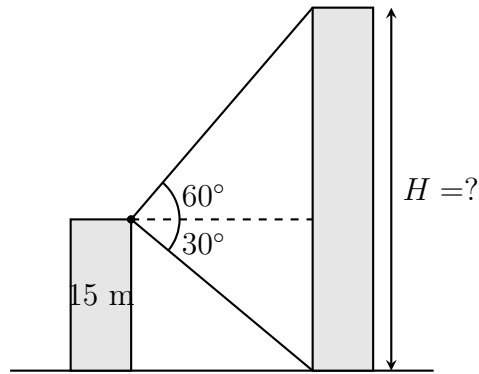
**Exercício 14.** Para determinar a altura de uma montanha, um topógrafo observa o seu cume sob um ângulo de elevação de  $45^\circ$ . Afastando-se 500 m em linha reta na mesma direção, passa a observar o cume sob um ângulo de  $30^\circ$ . Desconsiderando a altura do topógrafo, determine a altura exata da montanha.



**Exercício 15.** Um losango possui lados medindo 6 cm e um de seus ângulos internos mede  $120^\circ$ . Sabendo que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e que elas atuam como bissetrizes dos ângulos internos, determine as medidas exatas das duas diagonais deste losango.



**Exercício 16.** Do topo de um edifício de 15 m de altura, um observador vê o topo de um segundo edifício sob um ângulo de elevação de  $60^\circ$  e a base deste mesmo edifício sob um ângulo de depressão de  $30^\circ$ . Considerando que ambos os edifícios estão construídos sobre um mesmo terreno plano e horizontal, qual é a altura do segundo edifício?



## Resoluções

