Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes

Material de Apoio e Lista de Exercícios

Áreas e Superfícies - I

Professor: **Danilo Kanno**

Guaratinguetá

1 Introdução: Conceito de Área e Medida

A Geometria Plana dedica-se ao estudo de figuras bidimensionais. Enquanto o *perímetro* mede o contorno de uma figura (comprimento linear), a *área* é a medida de sua superfície interna (extensão bidimensional).

Calcular a área de uma figura significa comparar sua superfície com uma unidade padrão de medida preestabelecida. O processo de medição consiste em verificar quantas vezes essa unidade padrão "cabe"dentro da região delimitada pela figura.

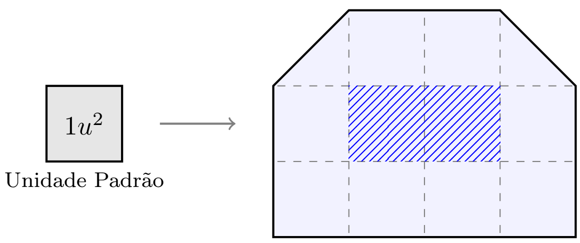
Unidades de Medida

Por convenção, a unidade fundamental de área é um quadrado cujo lado mede 1 unidade de comprimento.

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade padrão é o **metro quadrado** (m^2), definido como a área de um quadrado com 1 metro de lado. Dependendo da escala do objeto estudado, utilizam-se múltiplos ou submúltiplos, tais como:

- **Centímetro quadrado (cm^2):** Área de um quadrado de 1 cm de lado.
- **Quilômetro quadrado (km^2):** Área de um quadrado de 1 km de lado.

A figura abaixo ilustra o conceito de área como o preenchimento de uma região por unidades quadradas (u^2).



A área total corresponde à soma das unidades que preenchem a figura.

Dessa forma, quando afirmamos que uma sala possui $20\,m^2$, estamos indicando que a superfície do piso dessa sala equivale à superfície ocupada por 20 quadrados de 1 metro de lado cada.

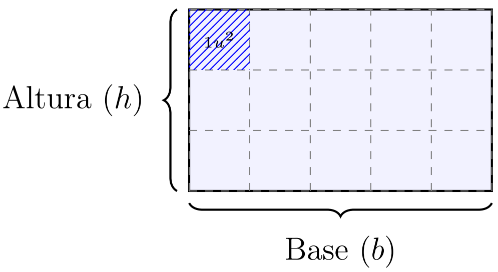
Nas seções seguintes, serão apresentadas formas otimizadas que permitem calcular essas áreas sem a necessidade de contar quadrados individualmente, bem como as suas respectivas demonstrações.

1.1 Retângulo

O retângulo é um quadrilátero com quatro ângulos retos. A intuição por trás de sua área reside no preenchimento da superfície por quadrados de lado unitário (unidade de área).

Se dividirmos a base em b unidades e a altura em h unidades, forma-se uma malha quadriculada. A quantidade total de quadrados unitários é obtida multiplicando-se o número de colunas pelo número de linhas.

Assim, a área é o produto das duas dimensões.



Total de unidades:

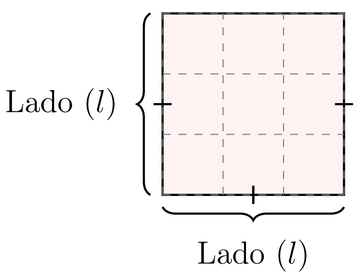
$b \times h$

$$A = b \cdot h$$

1.2 Quadrado

O quadrado é um retângulo especial que possui todos os lados congruentes (medidas iguais). Aplicando-se o mesmo princípio do retângulo, se a base mede l e a altura mede l, o preenchimento resulta em $l \times l$ unidades de área.

Portanto, a área do quadrado é a medida do lado elevada à segunda potência.



$$A = l \cdot l = l^2$$

$$A = l^2$$

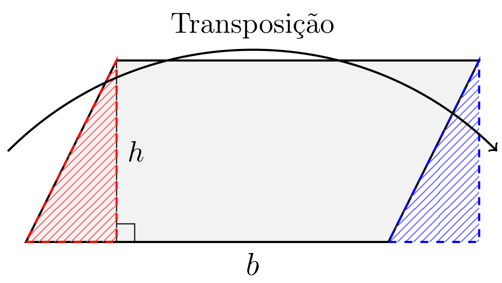
1.3 Paralelogramo

O paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos. Para compreender o cálculo de sua área, pode-se realizar uma decomposição e recomposição da figura.

Considere um paralelogramo de base b e altura h. Ao traçar a altura a partir de um dos vértices superiores, determina-se um triângulo retângulo em uma das extremidades.

Note que, se esse triângulo for transposto para a extremidade oposta, a figura resultante transforma-se em um retângulo de mesma base b e mesma altura h. Pelo princípio de conservação de área, conclui-se que a área do paralelogramo é equivalente à área desse retângulo.

Portanto, a área é dada pelo produto da medida da base pela medida da altura.



$$A = b \cdot h$$

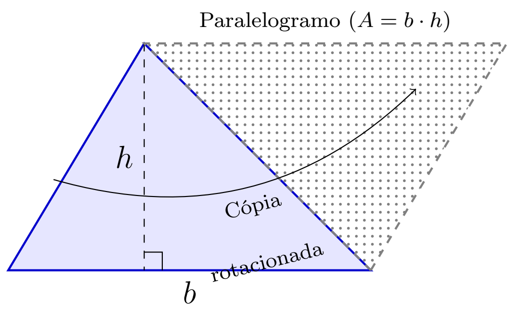
1.4 Triângulo

O triângulo é um polígono de três lados. Para deduzir a fórmula de sua área, utiliza-se um raciocínio de construção geométrica auxiliar.

Considere um triângulo qualquer de base b e altura h. Se duplicarmos esse triângulo e o posicionarmos invertido ao lado do original (rotacionado 180° em relação ao ponto médio de um dos lados), a figura composta resultante será um paralelogramo.

Como visto anteriormente, a área do paralelogramo é dada pelo produto da base pela altura $(b \cdot h)$. Visto que o paralelogramo é formado por dois triângulos congruentes (o original e sua cópia), conclui-se que a área do triângulo deve ser exatamente a metade da área desse paralelogramo.

Assim, a área é dada por:



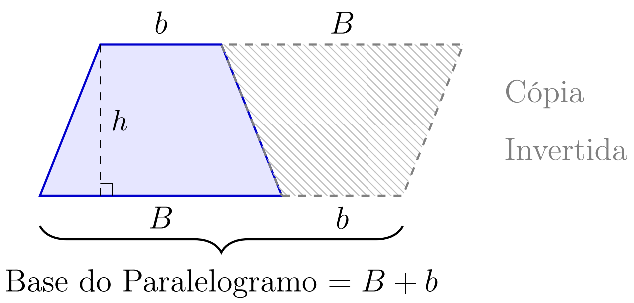
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

1.5 Trapézio

O trapézio é um quadrilátero com dois lados paralelos, chamados de base maior (B) e base menor (b). A altura (h) é a distância perpendicular entre essas bases.

Para deduzir a área, utiliza-se o mesmo princípio aplicado ao triângulo: a duplicação da figura. Ao se tomar um trapézio idêntico ao original e posicioná-lo invertido ao lado deste, obtém-se um grande paralelogramo.

A base desse novo paralelogramo é a soma das bases do trapézio $(B + b)$ e a altura permanece a mesma (h). Como o trapézio original representa a metade desse paralelogramo, sua área é a metade do produto da base total pela altura.



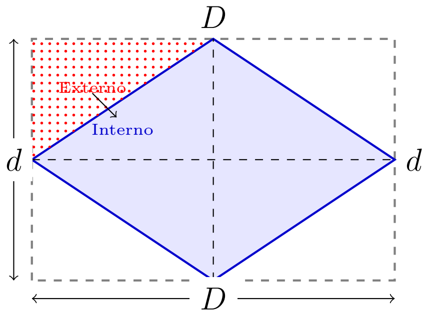
$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

1.6 Losango

O losango é um quadrilátero equilátero cujas diagonais se cruzam perpendicularmente no ponto médio. Denominamos a diagonal maior por D e a diagonal menor por d.

Para visualizar a área, pode-se imaginar um retângulo circunscrito ao losango, cujas dimensões sejam exatamente as medidas das diagonais D e d.

Observa-se que esse retângulo é composto por 8 triângulos retângulos idênticos, enquanto o losango ocupa apenas 4 desses triângulos (a parte central). Portanto, a área do losango equivale exatamente à metade da área do retângulo circunscrito.



$$A = \frac{D\cdot d}{2}$$

1.7 Áreas de Figuras Compostas

Na prática, frequentemente encontram-se polígonos irregulares que não correspondem diretamente às formas básicas (quadrados, triângulos, etc.). Nesses casos, não se utiliza uma fórmula única, mas sim estratégias de raciocínio lógico-visual.

Existem dois métodos principais para determinar a área dessas figuras:

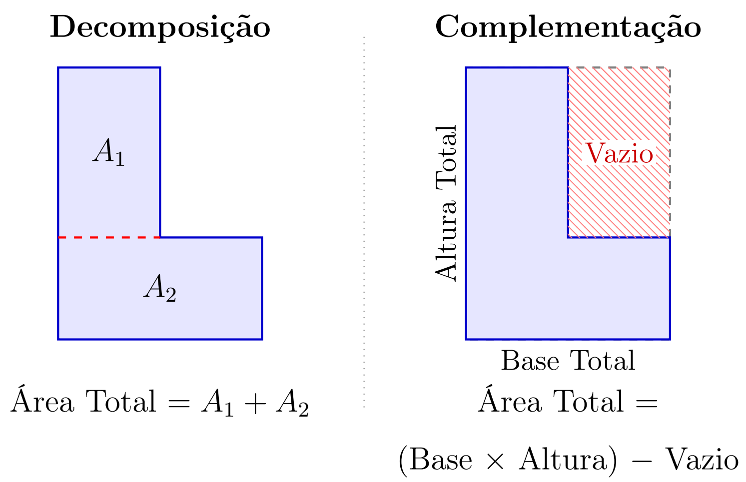
1.7.1 Método da Decomposição (Aditivo)

Consiste em dividir a figura complexa em polígonos menores e conhecidos. A área total será a soma das áreas parciais.

1.7.2 Método da Complementação (Subtrativo)

Consiste em "fechar"a figura irregular dentro de um retângulo maior e subtrair a área das regiões vazias. A área total será a área do retângulo circunscrito menos a área dos espaços em branco.

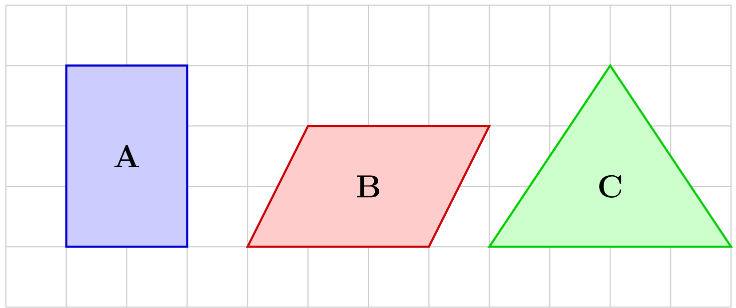
A figura abaixo ilustra a aplicação de ambos os métodos para um mesmo polígono:



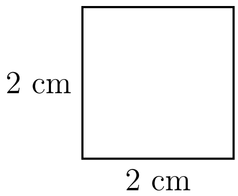
A escolha do método mais adequado depende da geometria da figura e das medidas fornecidas no problema. Recomenda-se analisar qual abordagem requer menos cálculos intermediários.

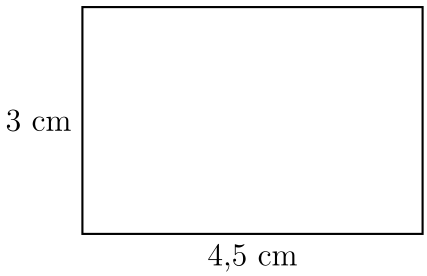
2 Exercícios

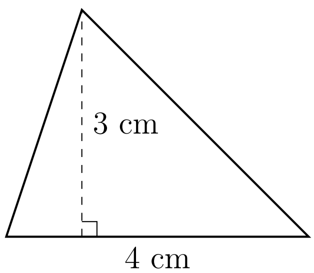
Exercício 1. Considere a malha quadriculada abaixo, onde cada quadrado possui lado igual a 1 cm. Determine a área das figuras poligonais destacadas (A, B e C).



Exercício 2. Calcule a área dos seguintes polígonos:

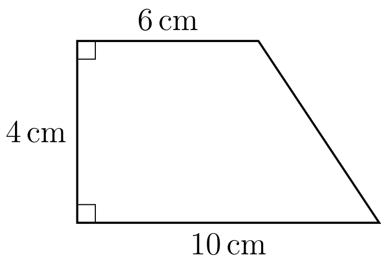
a) 

b) 

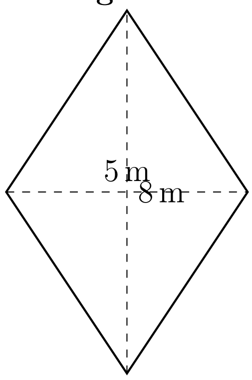
c) 

Exercício 3. Calcule a área dos polígonos representados abaixo, observando as medidas indicadas:

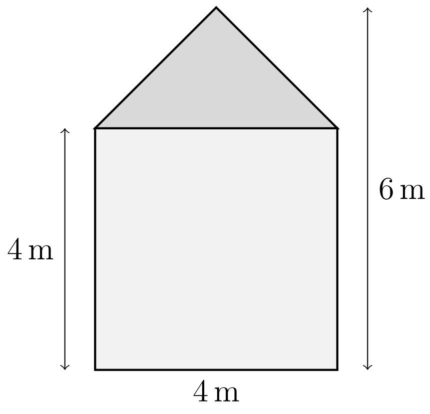
a) **Trapézio Retângulo**



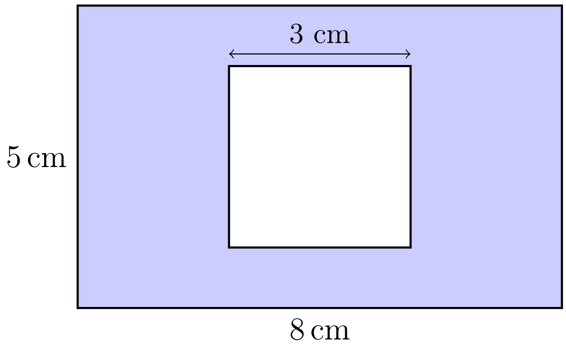
b) **Losango**



Exercício 4. A figura a seguir representa a vista frontal de uma casa simplificada. Ela é composta por um quadrado e um triângulo isósceles. Sabendo que o lado do quadrado mede 4 m e a altura total da figura é de 6 m, calcule a área total da fachada.



Exercício 5. Determine a área da região colorida (sombreada) na figura abaixo. Considere que a figura maior é um retângulo de dimensões 8 cm × 5 cm e a figura branca interna é um quadrado de lado 3 cm.



Exercício 6. Um terreno tem o formato de um paralelogramo, com base medindo 25 m e altura medindo 18 m. Deseja-se cobrir 50% da área desse terreno com grama. Quantos metros quadrados de grama serão necessários?

Exercício 7. Determine a área das figuras descritas abaixo:

a) Triângulo cuja base mede 8 cm e a altura mede 5,2 cm.

b) Paralelogramo cuja base mede 10 cm e a altura equivale à metade da medida da base.

c) Triângulo de base 18 cm e altura igual a $\frac{2}{3}$ da medida da base.

d) Trapézio de base menor igual a 2 cm, base maior igual a 3 cm e altura igual a 10 cm.

e) Trapézio cuja base maior mede 24 cm, a base menor mede 16 cm e a medida da altura é igual à metade da medida da base menor.

Exercício 8. Um piso quadrado de cerâmica tem 15 cm de lado. Quantos pisos são necessários para assoalhar uma sala de $45\,\text{m}^2$ de área?

Exercício 9. Um vitral é composto por 80 peças triangulares iguais, de base 25 cm e altura 16 cm. Qual é a área total desse vitral?

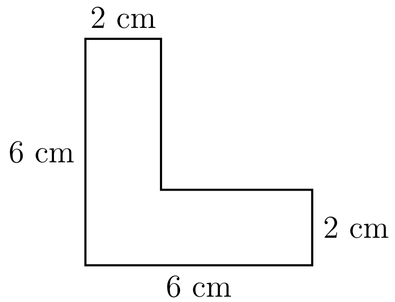
Exercício 10. O pátio de uma escola tem a forma retangular e as respectivas dimensões medem 40 m e 32 m. Nesse pátio foi construída uma quadra de basquete. Sabendo-se que as medidas oficiais de uma quadra de basquete são 20 m por 12 m, qual a área livre restante nesse pátio?

Exercício 11. Uma parede tem 8 m de comprimento por 2,75 m de altura. Com uma lata de tinta é possível pintar $10\,\text{m}^2$ de parede. Quantas latas de tinta serão necessárias para realizar a pintura completa dessa parede?

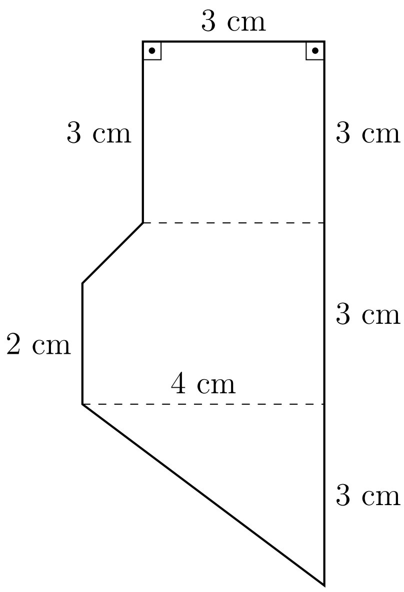
Exercício 12. Um campo de futebol possui 105 m de comprimento e 70 m de largura. Para gramar esse campo, foram adquiridas placas de grama. Cada placa pode cobrir uma área de $3,50\,\text{m}^2$. Quantas placas de grama foram necessárias para gramar o campo em sua totalidade?

Exercício 13. Sabendo-se que a área de um quadrado é $36\,\text{cm}^2$, qual é o respectivo perímetro?

Exercício 14. Calcule a área das seguintes figuras:

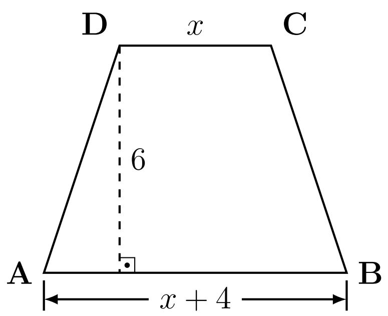


a)



b)

Exercício 15. A área do trapézio abaixo é 48 m^2. Calcule o valor de x:

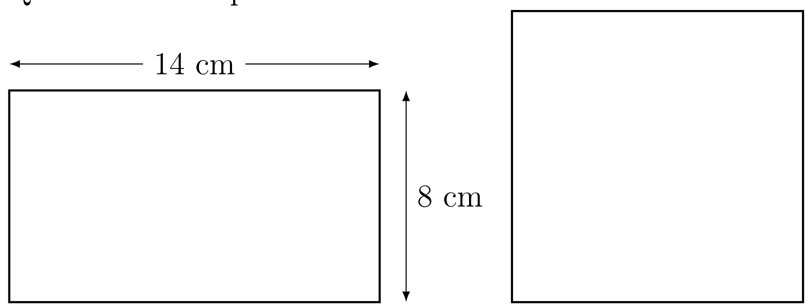


Exercício 16. No chão da sala de Matilde há um tapete com a forma de um quadrado. O perímetro do tapete é 20m. A área do chão da sala é 31m^2. Calcule a área da parte do chão da sala que não está coberta pelo tapete.

Exercício 17. O retângulo e o quadrado da figura possuem o mesmo perímetro.

a) Qual o lado do quadrado?

b) Qual a área do quadrado?



Resoluções